Часть II

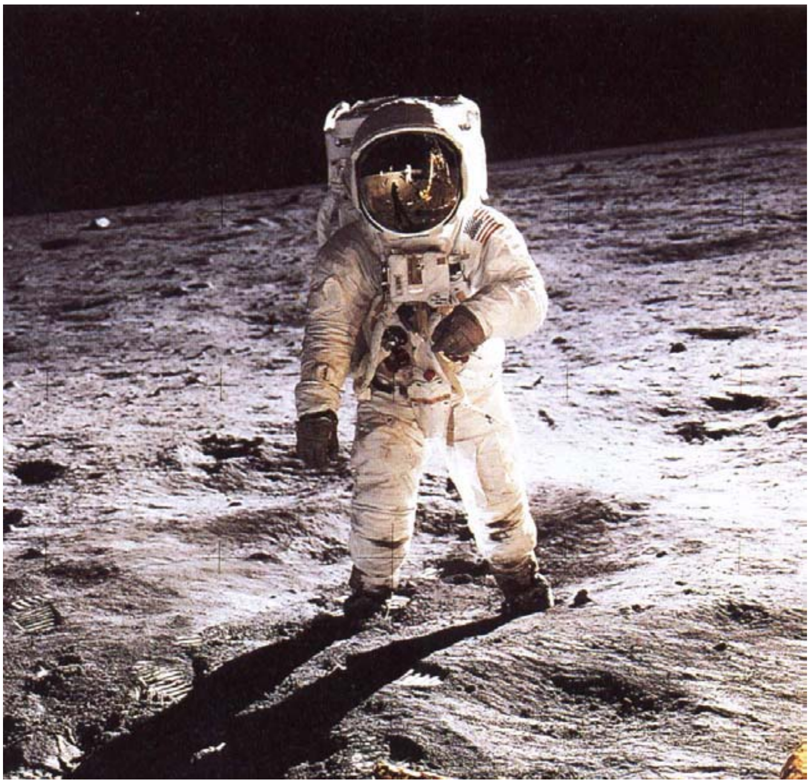
ТРИ ПЕРВЫХ ШАГА В МИР ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

In usum profanorum[24]

Каждому, кто хоть когда-нибудь изучал математические теории, знакомо то неприятное чувство, которое охватывает, когда шаг за шагом прослеживаешь всё доказательство и после всех тяжких трудов вдруг осознаёшь, что упустил главную идею, которую автор не подчеркнул либо вследствие неумения ясно выразить свои мысли, либо (что особенно часто встречалось раньше) из-за какого-то непонятного, почти комического кокетства. Помочь этой беде может лишь безграничная честность автора, который не должен бояться давать в руки своих читателей руководящие идеи даже в том случае, если эти идеи несовершенны [1].

— Альберт Эйнштейн

[24] Для непосвящённых.



20 июля 1969 года в 20 часов 17 минут по среднеевропейскому времени спускаемый аппарат "Орёл" космического корабля "Аполлон – 11" опустился на Луну. 21 июля в 3 часа 56 минут первые из землян – Нил Армстронг и Эдвин Олдрин[1] ступили на лунную поверхность.

Гораздо важнее то, что Христос вступил на Землю, чем то, что человек вступил на Луну.

Джеймс Ирвин[25]

[24]На фотографии Эдвин Олдрин во время "лунной прогулки". В стекле его скафандра отражается Нил Армстронг

[25]Американский космонавт, вступивший на Луну во время полёта "Аполлона – 15" (26 июля – 7 августа 1971)

Глава 4.

МЕХАНИКА — ЦАРСКИЙ ПУТЬ В ТЕОРИЮ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

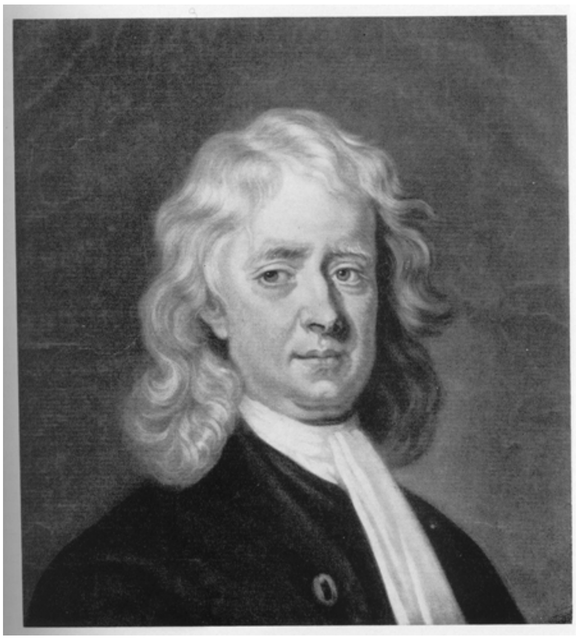
Salus per mechanica[26]

Не знаю, чем я могу казаться миру, но сам себе я кажусь только мальчиком, играющим на морском берегу, развлекающимся тем, что от поры до времени отыскиваю камешек более цветистый, чем обыкновенно, или красивую раковину, в то время как великий океан истины расстилается передо мной неисследованным [2].
— Исаак Ньютон

[26]Спасение души через механику.

§ 13. Предпосылки Теории физических структур, содержащиеся в законе Ньютона.

§ 14. Предварительное определение физической структуры ранга (2,2).



Sir Isaac Newton (1642 – 1727)

Закон I. *Corpus omne perseverate in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogiur statum suum mutare.*

Закон II. *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impresssae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

Закон III. *Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.*

Сейчас, спустя пятьдесят восемь лет, я вспоминаю своё первое яркое впечатление, которое произвёл на меня символ высокой науки, висевший в Большой физической аудитории в старом здании физического факультета Московского университета на Моховой.

Это была белая доска в чёрной лакированной раме, на которой по латыни были написаны Три закона Ньютона. И то, что они были написаны на неизвестном мне языке, придавало этим, хорошо известным ещё с детства, законам особую глубину и таинственность. Много лет спустя я обнаружил эту доску задвинутой в пыльный угол, как ненужный хлам, за шкафом в демонстрационном кабинете уже нового физического факультета на Ленинских горах.

Думал ли я тогда, что сорок пять лет своей жизни я посвящу созданию новой специальной области знания – физической герменевтики, предназначенной для выявления смысла и сущности всех физических законов и понятий, и возникшей из естественного желания ответить на вопрос: что же такое Второй закон Ньютона – закон или определение?

Что же касается формулировки Трёх законов механики Ньютона на латинском языке, то я обращаюсь к ней для того, чтобы подчеркнуть сакральное происхождение физической герменевтики, математические начала которой составляют основное содержание этой книги.

Переход из привычного мира эмпирической (материальной) действительности в качественно иной Мир Высшей реальности подобен восхождению от перенаселённых безблагодатных городских кварталов к благодатным вершинам высшего знания, скрытых от постороннего взгляда слоем облаков. При этом возникает естественное желание передать читателю всю гамму чувств, охватывающих первооткрывателя при восхождении к высшему знанию, с помощью дополнительных средств ("отступлений и украшений"), выходящих за рамки строгой и по-своему совершенной и красивой математики.

Аннотация к Главе 4

Механика Ньютона – царский путь в Теорию физических структур.

Фундаментальное понятие *физической структуры* возникло при анализе Второго закона механики Ньютона.

Чтобы обнаружить физическую структуру, лежащую в основании механики Ньютона, необходимо взять *два* тела i и k и *два* акселератора (“ускорителя”) α и β, написать четыре уравнения Ньютона

$m_i a_{\alpha i} = f_\alpha; \quad m_i a_{\beta i} = f_\beta; \quad m_k a_{\alpha k} = f_\alpha; \quad m_k a_{\beta k} = f_\beta,$

исключить из них массы m_i и m_k и силы f_α и f_β и получить сакральное соотношение между четырьмя ускорениями $a_{\alpha i} a_{\beta k} - a_{\beta i} a_{\alpha k} = 0$, вид которого не зависит от выбора тел i и k и акселераторов α и β.

Из этого тождества следует определение массы $m(i,e) = a_{\varepsilon e}/a_{\varepsilon i}$ и силы $f(\alpha,\varepsilon) = a_{\alpha e}/a_{\varepsilon e},$ если в качестве эталонного тела взять тело e, а в качестве эталонного акселератора взять акселератор ε.

Имея матрицу измеряемых на опыте ускорений $||a_{\alpha i}||,$ можно убедиться в том, что масса является скаляром, а сила – вектором.

Измеряя на опыте три ускорения $a_{\alpha e},$ $a_{\beta e}$ и $a_{\alpha\oplus\beta\ e},$ можно убедиться в существовании закона аддитивности сил $f_\alpha + f_\beta = f_{\alpha\oplus\beta}$. Аналогично, измеряя на опыте три ускорения $a_{\varepsilon i},$ $a_{\varepsilon k}$ и $a_{\varepsilon\ i\oplus k}$ можно убедиться в существовании закона аддитивности масс $m_i + m_k = m_{i\oplus k}$.

В случае поступательно движущейся неинерциальной системы отсчёта $\sigma,$ зная матрицу измеряемых на опыте ускорений $||\tilde{a}_{\alpha i;\sigma}||$ можно найти поступательное ускорение неинерциальной системы отсчёта σ относительно “первичной” инерциальной системы отсчёта

$b_\sigma = -(\tilde{a}_{\alpha i;\sigma}\ \tilde{a}_{\beta k;\sigma} - \tilde{a}_{\alpha k;\sigma}\ \tilde{a}_{\beta i;\sigma})/(\tilde{a}_{\alpha i;\sigma} + \tilde{a}_{\beta k;\sigma} - \tilde{a}_{\alpha k;\sigma} - \tilde{a}_{\beta i;\sigma})$

Описан мысленный эксперимент, позволяющий убедиться в том, что “сила тяготения”, имея иную природу, не складывается с “нормальной” силой f_α акселератора α; она вызывает эффект, эквивалентный изменению ускорения неинерциальной системы отсчёта.

В завершение приводится предварительная формулировка простейшей физической структуры ранга (2,2) и на примере закона Ньютона даётся физическая интерпретация основных понятий Теории физических структур.

Глава 4

Механика Ньютона – царский путь в теорию физических структур

§ 1. Исходная задача.

Безумная идея, которая ляжет в основу будущей фундаментальной физической теории, будет осознанием того, что физический смысл имеет некоторый математический образ, ранее не связывавшийся с реальностью [4]
— Ю. И. Манин

Первоначальная задача, из которой возникла Теория физических структур, выглядела весьма скромно – выяснить, в какой степени Второй закон механики Ньютона является экспериментально проверяемым физическим законом, а в какой определением силы, массы, инерциальной системы отсчёта.

При этом возникла необходимость дать такое определение исходным понятиям (силе, массе, инерциальной системе отсчёта), которые, в отличие от туманных, расплывчатых и неконструктивных определений, вроде "масса – есть мера инерции, а сила – мера механического действия" или "инерциальная система отсчёта — это такая система, в которой справедливы законы Ньютона" [5], были бы конструктивны, логически безупречны и позволили бы определить численное значение вводимых физических величин экспериментальным путём.

Цель была достигнута: выяснилось, что Второй закон механики Ньютона является одновременно и экспериментально проверяемым физическим законом (в форме соотношения между четырьмя ускорениями $a_{\alpha i}$, $a_{\alpha k}$, $a_{\beta i}$, $a_{\beta k}$, относящимися к двум произвольным телам i и k и к двум произвольным акселераторам[27] α и β , $a_{\alpha i}a_{\beta k} - a_{\beta i}a_{\alpha k} = 0$) и содержит в себе три независимых определения (определение силы, массы и инерциальной системы отсчёта).

Однако, как это иногда бывает, наряду с решением поставленной весьма частной задачи, было получено нечто гораздо большее.

Оказалось, что ход рассуждения, с помощью которого удалось получить индивидуальную характеристику тела – массу m_i и акселератора – силу f_α , исходя лишь из взаимных отношений между ними, может быть перенесён и на другие фундаментальные законы. Более того, оказалось, что за таким хорошо

[27] Под акселератором (ускорителем) мы будем понимать всевозможные поля или ускоряющие механизмы, сообщающие телам определённые ускорения.

известным ещё со школы законом, как Второй закон Ньютона, стоит целая неисследованная область **сакральных** (коллективных, системных) **отношений** между физическими объектами различной природы, порождающих, в частности, фундаментальные физические и геометрические законы.

Возникшая при этом теория, названная мною **Теорией физических структур**, исходит из хорошо известных физических законов и основных уравнений и выделяет из них нечто общее, универсальное, присущее всем фундаментальным физическим законам независимо от конкретной "физической природы" изучаемых объектов и используемых при этом измерительных приборов.

Оказывается, что с каждым фундаментальным физическим законом тесно связан определённый тип устойчивых отношений (физическая структура определённого ранга), не зависящий ни от "физической природы" изучаемого физического объекта, ни от выбора измерительного прибора.

Строгая математическая формулировка понятия физической структуры делает возможным изучение общих свойств физических законов до их конкретной физической интерпретации, подобно тому как абстрактные методы элементарной алгебры позволяют на бумаге решать конкретные школьные задачи, взятые из реальной действительности, не прибегая к анализу этой действительности.

Именно Теория физических структур позволяет обнаружить глубокое единство самых различных разделов физики. Опираясь на методы, разработанные в рамках этой теории, можно показать, что такие, внешне не похожие друг на друга разделы физики, как механика, специальная теория относительности, феноменологическая электродинамика, теория электрических цепей, равновесная термодинамика как бы вырастают из единого корня, реализуя тем самым физические структуры различных рангов [7].

Поскольку, как отмечалось выше, понятие физической структуры возникло при анализе Второго закона механики Ньютона, рассмотрим его более подробно.

§ 2. Закон Ньютона – закон или определение?

Общепризнанные мнения и то, что каждый считает
давно решённым, чаще всего заслуживают исследований.
— Г. К.Лихтенберг

Это началось более сорока лет тому назад. В 1957 году после окончания аспирантуры МГУ я оказался в Московском физико-техническом институте. Когда мне предложили прочитать курс механики, я задумался над её основами: что такое Закон Ньютона – закон или определение? что такое масса? что такое сила? что такое инерциальная система координат? О том, как удалось мне ответить на эти вопросы, как раз и рассказывается в этой главе.

Начнём с понятия "физического закона". Поводом для такого анализа служит та неопределённость, которая до сих пор остаётся при трактовке фундаментального закона механики – закона Ньютона

$$ma = f \tag{1}$$

закона Ома

$$I = \frac{U}{R}, \tag{2}$$

известного соотношения электростатики

$$F = qE \tag{3}$$

и целого ряда других подобных соотношений: является ли каждое из выписанных соотношений "физическим законом" или определением, соответственно, силы f, сопротивления R, напряжённости электрического поля E?

Заметим, что никаких проблем не возникает, когда речь идёт о зависимости, например, давления реального газа p от его объёма V и температуры T. Здесь совершенно ясно, что имеет место простейший "физический закон" – связь между тремя независимо определёнными, измеряемыми на опыте физическими величинами p_i, V_i и T_i, относящимися к различным состояниям i реального газа

$$p_i = p\,(V_i, T_i).$$

Когда же речь заходит о законе Ньютона (1) или о соотношениях (2) и (3), ситуация сильно осложняется тем, что, строго говоря, хорошо определёнными и измеряемыми на опыте величинами являются лишь ускорение a в первом случае, сила тока I – во втором и сила F, действующая на заряд q в электрическом поле E – в третьем [28].

Что же касается силы f и массы m в первом случае, разности потенциалов U и сопротивления R – во втором, заряда q и напряжённости электрического поля E – в третьем, то вопрос об их независимом определении представляется не таким простым, как это может показаться на первый взгляд.

Вот что писал по поводу изложения механики **Генрих Герц**: "Кажется почти невозможной сама мысль искать логические несовершенства в системе, которая разработана лучшими умами. Но прежде чем отказаться от дальнейшего исследования, следует спросить, все ли, в том числе и лучшие умы, были удовлетворены этой системой... По моему мнению, прежде всего нужно указать на то, что как раз введение в механику очень трудно излагать вдумчивым слушателям, не ощущая при этом необходимости то тут, то там приносить этим слушателям, конечно, не без некоторого смущения, извинения и не испытывая желания побыстрее перейти от введения к примерам, которые говорят сами за себя" [6].

Стараясь объяснить, почему Герц не был удовлетворён изложением механики в рамках классической системы, **Анри Пуанкаре** писал: "Прежде всего мы оказываемся перед трудностями, когда хотим дать определение основным понятиям. Что такое масса? "Это, – отвечает Ньютон, – произведение объёма на плотность".

[28] При последовательном (иерархическом) построении физики мы можем считать, что в электростатике понятие силы заимствуется из механики, где оно уже определено. Поэтому в законе $F = qE$ можно рассматривать силу F как хорошо определённую величину.

– "Лучше было бы сказать, – отвечают **Томсон** и **Тэт**, – что плотность есть количество массы в единице объёма". – Что такое сила? "Это, – скажет **Лагранж**, – причина, которая производит движение тела или которая стремится произвести движение". — "Это, — отвечает **Кирхгоф**, — произведение массы на ускорение". Но тогда почему не сказать, что масса есть количество силы, рассчитанной на единицу ускорения? Эти затруднения непреодолимы. Когда говорят, что сила есть причина движения, – это метафизика, и это определение, если бы пришлось довольствоваться им, оказалось бы совершенно бесплодным. Чтобы определение могло быть полезным, оно должно научить измерять силу; впрочем, этого достаточно, нет никакой необходимости, чтобы оно объясняло, что такое сила в себе и что она является причиной или следствием движения. Итак, мы возвращаемся к определению Кирхгофа: "**сила равна массе, умноженной на ускорение**". На этот "закон Ньютона" перестают, в свою очередь, смотреть как на экспериментальный закон, он становится только определением. Но это определение также недостаточно, потому что мы не знаем, что такое масса... Не остаётся ничего, и наши усилия были бесплодны, – мы оказались перед необходимостью прибегнуть к следующему определению, которое, по существу, является признанием нашего бессилия: массы представляют собой коэффициенты, которые удобно вводить в вычисления (см. [8]. – Ю.К.)... Мы должны сделать вывод, что при помощи классической системы невозможно дать удовлетворительную идею о силе и массе" [10].

Итак, трудности, возникшие при попытке строгого определения понятий массы, силы, инерциальной системы отсчёта, не являются случайными. Как показали работы Герца, Кирхгофа, Гельмгольца, Пуанкаре, эти трудности носят принципиальный характер. Для их преодоления необходимо выйти за рамки существующей парадигмы. Но чтобы это сделать, необходимо создать новую концептуальную систему, в основании которой лежали бы новые конструктивные понятия и принципы.

Обратимся к истокам этой концептуальной системы и попытаемся по-новому взглянуть на хорошо известный всем ещё со средней школы Второй закон механики Ньютона, рассмотрение которого с новой и неожиданной точки зрения привело меня в 1961 году к формулировке общего *принципа сакральной симметрии*, лежащего в основании Теории физических структур [9], [11].

§ 3. Трудности определения основных понятий механики.

По-видимому, всем хорошо известно, что всякое, достаточно вдумчивое изучение оснований механики, наталкивается на значительные трудности в понимании её исходных принципов. Это происходит из-за того, что в традиционной формулировке Второго закона Ньютона: "В инерциальной системе отсчёта произведение ускорения материальной точки на её массу равно по величине и направлению действующей на неё силе", вводится далеко не тривиальное понятие инерциальной системы отсчёта и устанавливается связь между тремя физическими величинами – ускорением, массой и силой, две последние из которых предварительно не определены.

Надо сказать, что эти трудности часто воспринимаются, как не принципиальные, связанные просто с элементарной манерой изложения, и легко устранимые при достаточно аккуратных формулировках на каком-то более современном уровне. Но это заблуждение, ибо восхождение на такого рода уровень требует особой работы мысли, тем более, что этот уровень необходимо ещё воссоздать.

Трудности определения основных понятий механики были известны как самому Ньютону, так и более поздним авторам. Однако тщательное исследование оснований механики началось лишь в середине позапрошлого XIX века. Начиная с этого момента, принципы ньютоновской механики становятся предметом критических исследований таких физиков и математиков как Сен-Венан, Мах, Кирхгоф, Герц и Пуанкаре. Провозгласив идею сведе́ния динамических понятий к кинематическим, они много сделали для устранения из ньютоновской механики всей той метафизики, которая с са́мого начала была связана с основными понятиями механики.

Тем не менее, ситуация, сложившаяся к началу двадцатого столетия, оказалась далеко не простой. Это хорошо понимали учёные того времени, и проблема трактовки законов Ньютона и определения понятий массы, силы и инерциальной системы отсчёта по-прежнему продолжала оставаться предметом многочисленных дискуссий в специальных журналах и на научных конференциях.

Блестящие успехи и не менее значительные трудности новейшей физики заслонили эту старую проблему. Но то обстоятельство, что она не стоит в центре внимания современной физики, ещё не означает, что эта проблема исчерпала себя. Напротив, мы должны признать, что фундамент современной физики, основные её понятия и принципы до сих пор опутаны серьёзными неопределённостями и приводящими в смущение трудностями, не преодолёнными до сих пор.

Так, несмотря на то, что с момента формулировки Второго закона Ньютона (1687) прошло более трёхсот лет, до сих пор нет окончательной ясности по следующим вопросам:

что такое масса?

что такое сила?

в какой степени Второй закон Ньютона является определением (массы? силы? инерциальной системы отсчёта?), а в какой — опытным фактом?

Рассмотрим, например, вопрос о том, что такое масса? Все известные попытки строгого определения массы не привели ко сколько-нибудь удовлетворительному решению проблемы, так как все рассмотренные ранее определения либо основаны на понятии силы как первоначального понятия, либо предполагают существование некоторого динамического закона, явно или неявно использующего понятие силы. К этому следует добавить трудности, связанные с неопределённостью понятия инерциальной системы отсчёта. “Мы получаем наши знания о силах, – замечает Уайтхед, – имея некоторую теорию массы, а наше знание массы мы имеем на основании некоторой теории относительно силы" [12].

Многочисленные неудачные попытки логически последовательной формулировки ньютоновской механики, казалось бы, подтверждают эту точку зрения. Так, анализируя современное состояние вопроса о точной формулировке законов Ньютона, известный специалист по истории физики Макс Джеммер пишет: "Хотя ньютоновская механика является простейшей теорией, какую физика когда-либо создавала, и хотя для обычных физических объектов средних масштабов механика Ньютона в высшей степени справедлива, тем не менее её логическая структура не поддаётся попыткам полного логического анализа, если допустить, что такой анализ предполагает явное определение содержавшихся в этой структуре фундаментальных понятий" [13].

Однако, к счастью, такая пессимистическая точка зрения является, по-видимому, ошибочной. В этой книге предлагается новая формулировка Второго закона Ньютона, позволяющая рассматривать механику как законченную концептуальную систему, обладающую достаточно высокой степенью логико-математической строгости.

§ 4. О первичных неопределяемых понятиях механики.

Итак, в соответствии с общим принципом сакральной симметрии, мы, прежде чем формулировать тот или иной физический закон, должны указать:

множество физических объектов, на котором определён этот закон, и

экспериментальную операцию μ, реализующую этот закон путём сопоставления каждой паре физических объектов (α, i) определённого вещественного числа – экспериментально измеряемой величины $a(\mu)_{\alpha i}$.

Если речь идёт о законах механики, то среди множеств различных физических объектов особое значение играют два:

множество тел $\mathfrak{M}$ и

множество акселераторов[29] $\mathfrak{N}$.

Заметим при этом, что понятие "тело" и "акселератор" вводятся нами в теорию как первоначальные, интуитивно ясные понятия. Мы не можем дать им какие-либо разумные определения, не рискуя впасть в тавтологию (например, "тело – это отдельный предмет"); единственное, что мы можем сделать, это указать на реальные объекты и сказать: "Вот это и это — тела, а это — акселераторы".

На первый взгляд может показаться, что столь туманное определение исходных понятий неминуемо должно привести к неизбежной некорректности в формулировке основных физических законов. Но, к счастью, этого не происходит. Дело в том, что несмотря на то, что сами понятия "тело" и "акселератор" остаются неопределёнными, можно дать предельно строгое определение понятию

[29] Под акселератором мы будем понимать всевозможные механизмы и поля, сообщающие телам различные ускорения.

отношений, в которых находятся тела и акселераторы, и на уровне которых как раз и возникают фундаментальные физические понятия – *масса* и *сила*.

Таким образом, не имея возможности дать содержательные определения терминам, обозначающим реальные физические объекты (тела, акселераторы и т.п.) мы, тем не менее, можем и обязаны дать предельно строгие определения основным физическим понятиям – массе, силе, инерциальной системе отсчёта. Это необходимо сделать, так как в противном случае всё здание физики, и, в частности, механики, оказалось бы построенным на песке [14].

Обращаясь к экспериментальной операции μ, сопоставляющей каждому телу i и каждому акселератору α определённое вещественное число $a(\mu)_{\alpha i}$, мы сталкиваемся с той же проблемой – можно ли априори, ничего не зная ни о телах, ни об акселераторах, узнать, что это за операции. Естественно, что это невозможно; никакая математическая теория не в состоянии предугадать эту эмпирическую процедуру. И именно здесь, в поисках измерительной операции, отражающей закономерности отношений между физическими объектами (между телами и акселераторами, в нашем конкретном случае) должна проявиться интуиция физика, открывающего тот или иной физический закон.

Должен родиться гений, такой как Галилей или Ньютон, чтобы сказать:
“В качестве характеристики отношений между множеством тел и множеством акселераторов необходимо взять, вопреки Аристотелю, не скорость, а ускорение”.

Через двести тридцать лет другой гений – Эйнштейн – внесёт поправку:
“В качестве этой характеристики нужно взять не обычное трёхмерное ускорение $a_\nu = \frac{dv_\nu}{dt}$, а общековариантное 4-ускорение

$$a(\alpha, i)_n = g_{nm}\frac{du^m}{d\tau} + \Gamma_{n,ml}u^m u^l,$$

которое, так же как и a_ν, может быть измерено на опыте, то есть выражено через трёхмерные скорости и ускорения”.

Уточнилась, изменилась в связи с использованием релятивистской кинематики измерительная процедура $\overset{*}{\mu}$, но суть основного закона механики, как мы увидим ниже, осталась той же.

§ 5. Физические величины и их единицы.

То, что в первую очередь отличает теоретическую физику от математики, это широкое использование *физических величин* – длины, времени, скорости, ускорения, температуры, силы, массы, энергии и т.д. – и соответствующих *единиц* – метра, секунды, метра в секунду, метра на секунду в квадрате, кельвина, ньютона, килограмма, джоуля и т.д.

Что же такое физическая величина?

Любая физическая величина зависит прежде всего от самого́ физического объекта i и от соответствующей измерительной процедуры σ, позволяющей выявить те или иные характеристики этого физического объекта.

Обычно, имея перед собой простейшую, наглядную операцию измерения длины стержня, трактуют процедуру измерения любой физической величины как процедуру "откладывания" эталонного физического объекта e на измеряемом объекте i [15]. Эту операцию ещё можно как-то представить и осуществить в случае измерения длины, сложнее – площади, и уже с большим трудом – объёма.

Но что значит "отложить" эталонное состояние на измеряемое состояние того или иного физического тела в случае измерения его температуры, плотности или намагниченности? Как, например, "отложить" один градус Кельвина на состояние нагретого тела?

Дело в том, что при более строгом рассмотрении процедуры измерения с точки зрения Теории физических структур выясняется, что универсальный алгоритм измерения любой физической величины не имеет ничего общего с наглядным "откладыванием" эталона.

Процесс измерения физической величины предполагает существование целого множества

$$\mathfrak{S} = \{\,\sigma,\, \lambda, \ldots\}$$

различных по своей конструкции приборов с различными равномерными шкалами, предназначенных для измерения одной и той же характеристики рассматриваемого физического объекта i .

Физической величиной называется числовая функция двух нечисловых переменных:

физического объекта $i \in \mathfrak{M}$

и соответствующего измерительного прибора $\sigma \in \mathfrak{S}$, то есть

$$a:\ \mathfrak{S} \times \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\sigma,\ i) \longmapsto a_\sigma(i)$$

Другими словами, произвольно выбранный прибор σ сопоставляет каждому физическому объекту i число $a_\sigma(i)$, называемое физической величиной физического объекта i .

Между множеством физических объектов $\mathfrak{M}$ и множеством соответствующих измерительных приборов $\mathfrak{S}$ имеют место вполне определённые устойчивые отношения, находящие своё выражение в факте существования простейшей мультипликативной физической структуры ранга (2,2). Это значит, что четыре физические величины

$$a_\sigma(i),\ a_\sigma(k) \qquad \text{и} \qquad a_\lambda(i),\ a_\lambda(k),$$

относящиеся к двум различным физическим объектам i и k и полученные в результате двух измерительных операций σ и λ , связаны между собой простейшим соотношением:

$$\begin{vmatrix} a_\sigma(i) & a_\sigma(k) \\ a_\lambda(i) & a_\lambda(k) \end{vmatrix} = a_\sigma(i)\, a_\lambda(k) - a_\sigma(k)\, a_\lambda(i) = 0$$

или

$$\frac{a_\sigma(i)}{a_\sigma(k)} = \frac{a_\lambda(i)}{a_\lambda(k)} = \ldots = a(k,\, i),$$

то есть отношение двух физических величин $\frac{a_\sigma(i)}{a_\sigma(k)} = a(k,\, i)$ не зависит от выбора измерительного прибора σ.

Таким образом, имеем

$$a_\sigma(i) = a_\sigma(k) \cdot a(k,\, i). \tag{4}$$

Если среди всех физических объектов, принадлежащих к множеству $\mathfrak{M}$ выбрать один объект

$$e \in \mathfrak{M}$$

и назвать его *эталонным* физическим объектом, то равенство (4) приобретёт вид:

$$a_\sigma(i) = a_\sigma(e) \cdot a(e,\, i). \tag{5}$$

Итак, любая физическая величина $a_\sigma(i)$ представляет собой произведение двух числовых функций $a_\sigma(e)$ и $a(e,\, i)$.

Первая числовая функция $a_\sigma(e)$ представляет собой физическую величину физического объекта e, принятого в качестве эталона. По традиции эта числовая функция называется *“единицей физической величины”* и обозначается так [16] [стр. 12]:

$$a_\sigma(e) = [\,e\,]_\sigma.$$

Она как бы вбирает в себя “ненужную” переменную — произвольную измерительную операцию σ, делая тем самым величину $a(e,\, i)$ инвариантной относительно выбора операции σ.

По традиции числовая функция $a(e,\, i)$ называется *“численным значением физического объекта i при выборе в качестве эталона физического объекта e”* и обозначается так [17] [стр. 12]

$$a(e,\, i) = \{\,a\,\}.$$

Таким образом, равенство (5) в традиционных обозначениях выглядит следующим образом

$$a_\sigma = [\,e\,]_\sigma \cdot \{\,a\,\}. \tag{6}$$

В случае, если эталонный физический объект e – “сантиметр” и $a(\text{см},\, i) = 12$, то равенство (6) примет знакомый ещё из средней школы вид:

$$\ell_\sigma = \text{см}_\sigma \cdot 12 \qquad \text{или} \qquad \ell = 12\,\text{см}.$$

По традиции, идущей от наглядной процедуры измерения длины стержня путём откладывания на нём стержня, принятого за эталон, считается, что единица физической величины совпадает с соответствующим физическим объектом, принятым в качестве эталона. Но если это так, то единица скорости должна представлять собой частное от деления отрезка единичной длины на промежуток времени между двумя фиксированными событиями, принятыми за эталон, напоминая при этом нечто несуразное типа частного от деления пирога на сапоги.

Итак, установление числовой природы физической величины $a_\sigma(i)$ и её единицы $a_\sigma(e)$ снимает многие проблемы, возникающие при рассмотрении уравнений, описывающих физические законы, а именно:

• отпадает необходимость введения "именованных чисел", имеющих якобы какую-то особую нечисловую природу;

• делает возможным осуществлять с единицами физических величин обычные операции — умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня [30].

• позволяет правильно сформулировать и написать выражение для физического закона в виде, инвариантном относительно выбора эталонов e и процедуры измерения σ.

В чём же состоит основное содержание механики и, прежде всего, механики материальной точки?

Чтобы понять это, начнём с хорошо известного ещё из средней школы Второго закона Ньютона.

§ 6. Фундаментальный опытный факт, лежащий в основании механики.

В чём же состоит основное содержание механики, и прежде всего, механики материальной точки?

Чтобы понять это, начнём ab ovo.

Рассмотрим два множества: $\mathfrak{M}$ — множество тел $i, k, \cdots, l, \cdots$ и $\mathfrak{N}$ — множество акселераторов $\alpha, \beta, \cdots, \gamma, \cdots$.

Акселератор α, действуя на тело i, сообщает ему ускорение $a_{\alpha i}$. Если рассмотреть действие всех акселераторов из $\mathfrak{N}$ на все тела из $\mathfrak{M}$, то множество всех полученных при этом ускорений $a_{\alpha i}$ можно записать в виде следующей

[30] Что же касается операций сложения и вычитания, то в них, в силу специфики физических величин, просто нет необходимости. Дело в том, что физические величины возникают в результате существования особых отношений между множеством физических объектов $\mathfrak{M}$ и множеством измерительных приборов $\mathfrak{S}$, в основании которых лежит *мультипликативная* физическая структура ранга (2,2), обеспечивающая существование инвариантов $a(e,i) = \frac{a_\sigma(i)}{a_\sigma(e)} = \ldots = \frac{a_\lambda(i)}{a_\lambda(e)}$, не зависящих от случайного выбора той или иной измерительной операции σ. Другими словами, физическая величина, имея числовую природу, обладает ещё одним важным свойством: *отношение* двух физических величин инвариантно относительно выбора конкретной измерительной операции.

прямоугольной матрицы

$$\left(\mathfrak{a}\right) = \begin{pmatrix} a_{\alpha i} & a_{\alpha k} & \cdots & a_{\alpha l} & \cdots \\ a_{\beta i} & a_{\beta k} & \cdots & a_{\beta l} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\gamma i} & a_{\gamma k} & \cdots & a_{\gamma l} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{7}$$

Заметим, что в этой матрице заложена вся информация об отношениях между телами из $\mathfrak{M}$ и акселераторами из $\mathfrak{N}$. Задача состоит в том, чтобы извлечь её из этой матрицы и воплотить её в физический закон – Второй закон механики Ньютона.

Оказывается, что матрица (7), состоящая из экспериментальных значений соответствующих ускорений, измеренных в инерциальной системе отсчёта, обнаруживает следующую замечательную закономерность:

её ранг равен единице.

Это означает, что ускорения $a_{\alpha i}, a_{\alpha k}, a_{\beta i}, a_{\beta k}$, измеренные в инерциальной системе отсчёта и относящиеся к двум произвольным телам i и k, и к двум произвольным акселераторам α и β, связаны между собой одним и тем же соотношением

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{\alpha i} & a_{\alpha k} \\ a_{\beta i} & a_{\beta k} \end{vmatrix} = 0.} \tag{8}$$

В том, что это действительно так, нетрудно убедиться, замечая, что

$$a_{\alpha i} = \frac{f_\alpha}{m_i}.$$

Но, с другой стороны, можно непосредственно исходить из опыта, который показывает, что *несмотря на произвольную природу тел* $i,\ k, \ldots$ *и произвольную природу акселераторов* $\alpha,\ \beta, \ldots$ *ускорения, образующие матрицу (7), не являются произвольными; при произвольном выборе двух тел* i *и* k *и двух акселераторов* α *и* β*, ускорения* $a_{i\alpha},\ a_{i\beta},\ a_{k\alpha},\ a_{k\beta}$*, оказываются связанными между собой соотношением (8).*

Итак, соотношение (8), содержащее только измеряемые на опыте ускорения $a_{\alpha i}, a_{\alpha k}, a_{\beta i}, a_{\beta k}$, и справедливое при любом выборе двух тел i и k и двух акселераторов α и β, можно трактовать как

фундаментальный опытный факт,

лежащий в основании динамики точки.

Мы получили его, исходя из традиционного Закона Ньютона $ma = f$. Однако, чуть ниже мы покажем и обратное: принимая соотношение (8) в качестве исходного опытного факта, можно получить, при надлежащем выборе эталонного тела e и эталонного ускорителя ε, Второй закон механики Ньютона в его канонической форме $ma = f$.

С формальной стороны соотношение (8) представляет собой некоторую функциональную связь

$$\Phi(a_{\alpha i}, a_{\alpha k}, a_{\beta i}, a_{\beta k}) = 0 \tag{9}$$

между четырьмя числами $a_{\alpha i}, a_{\alpha k}, a_{\beta i}, a_{\beta k}$, каждое из которых является *числовой функцией двух нечисловых переменных* (так ускорение $a_{\alpha i}$ есть числовая функция акселератора α и тела i), а всё соотношение в целом содержит четыре нечисловых переменных – две переменные i и k и две переменные α и β.

Если потребовать, чтобы связь (9) сохраняла бы свой вид при любом выборе нечисловых переменных α, β и i, k, то, как будет показано в Части IV, соотношение (8) является **единственным** соотношением, удовлетворяющим этому требованию.

Другими словами, требование сакральной инвариантности, то есть инвариантности относительно выбора двухэлементных подмножеств

$$\{\alpha, \beta\} \subset \mathfrak{N} \qquad\qquad \{i, k\} \subset \mathfrak{M}$$

непосредственно приводит к фундаментальному соотношению (8).

Резюмируя всё сказанное, назовём равенство (8) **верифицированной**[31] **формой Закона Ньютона.**

Подчеркнём, что верифицированная форма Закона Ньютона (8) не содержит ничего иного, кроме измеряемых на опыте ускорений, и поэтому может быть подвергнута непосредственной экспериментальной проверке.

В связи с этим мы будем называть **феноменологическим**[32] **основанием** такую систему аксиом, в которой исходными понятиями являются непосредственно измеряемые величины. В данном случае в качестве такой величины принимается ускорение $a_{\alpha i}$.

§ 7. Два сакральных инварианта $\varphi(\alpha, \beta)$ и $\mu(i, k)$.

Итак, измеряя ускорения различных тел под воздействием различных акселераторов, мы обнаружим, что каковы бы ни были пары тел i и k и пары акселераторов α и β, всегда будет выполняться равенство:

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha i} & a_{\alpha k} \\ a_{\beta i} & a_{\beta k} \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Принимая этот опытный факт за основу, легко показать, что отношение двух ускорений $a_{\alpha i}$ и $a_{\beta i}$ одного и того же тела i при действии на него двух различных акселераторов α и β не зависит от выбора этого тела, то есть

$$\frac{a_{\alpha i}}{a_{\beta i}} = \frac{a_{\alpha k}}{a_{\beta k}} = \frac{a_{\alpha l}}{a_{\beta l}} = \ldots = \varphi(\alpha, \beta), \tag{11}$$

[31] От слова *верификация* [фр. vérification < лат. verus истинный + facere делать] – установление истинности теоретических положений опытным путём.

[32] От слова *феномен* [греч. $\varphi\alpha\iota\nu\acute{o}\mu\epsilon\nu o\nu$ – являющееся, $\varphi\alpha\acute{\iota}\nu o\mu\alpha\iota$ – являюсь].

где $\varphi(\alpha,\beta)$ – некоторая величина, являющаяся относительной характеристикой акселераторов α и β, инвариантная относительно выбора тел (второй[33] сакральный инвариант).

Точно так же из равенства (10) следует, что отношение двух ускорений $a_{\alpha i}$ и $a_{\alpha k}$ двух различных тел i и k при поочерёдном действии на них одного и того же акселератора α не зависит от выбора этого акселератора, то есть

$$\frac{a_{\alpha k}}{a_{\alpha i}} = \frac{a_{\beta k}}{a_{\beta i}} = \frac{a_{\gamma k}}{a_{\gamma i}} = \ldots = \mu(i,k), \tag{12}$$

где $\mu(i,k)$ – некоторая величина, являющаяся относительной характеристикой тел i и k, инвариантная относительно выбора акселераторов (третий сакральный инвариант).

Обратим внимание на последовательность аргументов α и β при обозначении сакрального инварианта

$$\varphi(\alpha,\beta) = \frac{a_{\alpha i}}{a_{\beta i}}$$

и противоположное расположение аргументов i и k при обозначении сакрального инварианта

$$\mu(i,k) = \frac{a_{\alpha k}}{a_{\alpha i}}.$$

При выборе обозначений для сакральных инвариантов $\varphi(\alpha,\beta)$ и $\mu(i,k)$ мы руководствовались следующими соображениями: соотношение

$$a_{\alpha i} = \frac{a_{\alpha k}}{a_{\beta k}}\; a_{\beta k}\; \frac{a_{\beta i}}{a_{\beta k}},$$

которое получается, если переписать верифицированную форму Закона Ньютона (10) в виде, разрешённом относительно $a_{\alpha i}$:

$$a_{\alpha i} = a_{\alpha k}\; \frac{1}{a_{\beta k}}\; a_{\beta i} = \frac{a_{\alpha k}}{a_{\beta k}}\; a_{\beta k}\; \frac{a_{\beta i}}{a_{\beta k}},$$

приобретает явно симметричный вид, если ввести приведённые выше обозначения:

$$\boxed{a_{\alpha i} = \varphi(\alpha,\beta)\; a_{\beta k}\; \mu(k,i).} \tag{13}$$

Симметрия сохраняется, если уравнение (13) разрешить относительно $a_{\beta k}$

$$a_{\beta k} = \frac{1}{\varphi(\alpha,\beta)}\; a_{\alpha i}\; \frac{1}{\mu(k,i)} = \varphi(\beta,\alpha)\; a_{\alpha i}\; \mu(i,k).$$

Легко видеть, что оба сакральных инварианта $\varphi(\alpha,\beta)$ и $\mu(i,k)$ обладают свойствами рефлексии

$$\varphi(\alpha,\alpha) = 1 \qquad\qquad \mu(i,i) = 1$$

[33]первый сакральный инвариант будет рассмотрен в § 14.

обратимости

$$\varphi(\alpha,\beta)=\frac{1}{\varphi(\beta,\alpha)} \qquad\qquad \mu(i,k)=\frac{1}{\mu(k,i)}$$

и мультипликативности

$$\varphi(\alpha,\gamma)=\varphi(\alpha,\beta)\ \varphi(\beta,\gamma)$$

$$\mu(i,l)=\mu(i,k)\ \mu(k,l)$$

Уравнение (13) является сакральным прообразом традиционного уравнения Ньютона. Мы будем называть его **сакральной формой Закона Ньютона**

§ 8. Что же такое сила и масса?

Чтобы ответить на эти вопросы, обратимся к Закону Ньютона, записанному в сакрально-инвариантной форме:

$$a(\alpha\ i)=\varphi(\alpha,\beta)\ a(\beta\ k)\ \mu(k,i), \tag{14}$$

где сакральные инварианты $\varphi(\alpha,\beta)$ и $\mu(k,i)$, характеризующие, соответственно, отношения между двумя акселераторами α и β и отношения между двумя телами i и k, имеют, в частности, следующий вид:

$$\varphi(\alpha,\beta)=\frac{a(\alpha\ k)}{a(\beta\ k)} \tag{15}$$

$$\mu(k,i)=\frac{a(\beta\ i)}{a(\beta\ k)}. \tag{16}$$

1. Чтобы получить новые физические величины, характеризующие каждый акселератор α и каждое тело i в отдельности, выберем и зафиксируем в качестве **эталонов** один акселератор ε из множества $\mathfrak{N}$ и одно тело e из множества $\mathfrak{M}$.

Заменяя в выражениях (15) и (16) β на ε и k на e, получим две новые числовые функции от одной нечисловой переменной α или i:

$$\varphi(\alpha,\varepsilon)=\frac{a(\alpha\ e)}{a(\varepsilon\ e)}$$

$$\mu(e,i)=\frac{a(\varepsilon\ i)}{a(\varepsilon\ e)}. \tag{17}$$

Функция $\varphi(\alpha,\varepsilon)$ – представляет собой сакральный инвариант, описывающий свойство произвольного акселератора α по сравнению с эталоном ε;

Что же касается функции $\mu(e,i)$, то она представляет собой сакральный инвариант, описывающий свойство тела e, принятого за эталон, по сравнению с произвольно выбранным телом i.

Чтобы получить сакральный инвариант, описывающий свойство произвольного тела i по сравнению с эталоном e, переставим в выражении (17) местами e и i:

$$\mu(i,e) = \frac{1}{\mu(e,i)} = \frac{a(\varepsilon\ e)}{a(\varepsilon\ i)}.$$

Итак, имеем два сакральных инварианта, описывающие
акселератор α

$$\varphi(\alpha,\varepsilon) = \frac{a(\alpha\ e)}{a(\varepsilon\ e)}$$

и тело i

$$\mu(i,e) = \frac{a(\varepsilon\ e)}{a(\varepsilon\ i)}.$$

Назовём первый из них **относительной силой** акселератора α

$$f(\alpha,\varepsilon) = \frac{a(\alpha\ e)}{a(\varepsilon\ e)}, \tag{18}$$

а второй — **относительной массой** тела i

$$m(i,e) = \frac{a(\varepsilon\ e)}{a(\varepsilon\ i)}. \tag{19}$$

Полагая в равенстве (14) $\beta = \varepsilon$ и $k = e$, получим

$$a(\alpha\ i) = \varphi(\alpha,\varepsilon)\ a(\varepsilon\ e)\ \mu(e,i)$$

или

$$a(\alpha\ i) = a(\varepsilon\ e)\ \frac{f(\alpha,\varepsilon)}{m(i,e)}$$

и окончательно

$$\boxed{m(i,e)\ a(\alpha\ i;\varepsilon\ e) = f(\alpha,\varepsilon),} \tag{20}$$

где

$$a(\alpha\ i;\varepsilon\ e) = \frac{a(\alpha\ i)}{a(\varepsilon\ e)}$$

Соотношение (20) представляет собой Закон Ньютона, записанный в безразмерном виде.

Поскольку все входящие в выражение (20) величины выражаются через измеряемые на опыте ускорения, то Закон Ньютона (20) допускает непосредственную проверку на опыте.

2. Вернёмся к определениям относительной силы (18) и (19).

Припишем эталонному акселератору ε число $[\varepsilon]_a$, а эталонному телу i число $[e]_b$ и назовём новое число

$$\boxed{[\alpha]_a = f(\alpha,\varepsilon)[\varepsilon]_a} \tag{21}$$

абсолютной силой акселератора α ,

а другое новое число

$$\boxed{[i]_b = m(i,e)[e]_b} \tag{22}$$

абсолютной массой тела i .

Теперь остаётся выяснить, что же скрывается за введёнными только что числами $[\varepsilon]_a$, $[\alpha]_a$, $[e]_b$, $[i]_b$?

Числа $[\varepsilon]_a$ и $[\alpha]_a$ представляют собой **числа делений** произвольного прибора a с равномерной шкалой, предназначенного для непосредственного измерения силы (например, динамометра) при измерении, соответственно, силы эталонного акселератора ε и силы произвольного акселератора α .

Точно так же, числа $[e]_b$ и $[i]_b$ представляют собой **числа делений** произвольного прибора b с равномерной шкалой, предназначенного для непосредственного измерения массы (например, весов) при измерении, соответственно, массы эталонного тела e и массы произвольного тела i .

Заметим, что числа $[e]_b$ и $[i]_b$, то есть "наименованная масса" и "единица массы" как бы впитывают в себя несущественные сведения об измерительном приборе b , сохраняя важную физическую величину — массу $m(i,e)$ – независящей от конкретной процедуры измерения.

В традиционной физике формулы (21) и (22) и им подобные истолковываются довольно туманным образом:

число $[\alpha]_a$ называют "наименованной физической величиной – силой",
число $f(\alpha,\varepsilon) = \underline{f}$ называют "численным значением силы",
число $[\varepsilon]_a$ называют "единицей силы"
и записывают выражение (21) в виде $f = \underline{f}$ *дин*
или конкретно f =120*дин.*

Аналогично

число $[i]_b$ называют "наименованной физической величиной – массой",
число $m(i,e) = \underline{m}$ называют "численным значением массы",
число $[e]_b$ называют "единицей массы"
и записывают выражение (22) в виде $m = \underline{m}$ *грамм*
или конкретно m =500*грамм.*

§ 9. Закон Ньютона в случае трёхмерного движения; скалярная природа массы и векторная природа силы.

До сих пор мы ограничивались рассмотрением случая одномерного движения. В случае трёхмерного движения, когда вместо одной компоненты ускорения

$a\,(\alpha\, i)$ мы должны рассматривать три проекции ускорения $a_x(\alpha\, i)$, $a_y(\alpha\, i)$, $a_z(\alpha\, i)$, на ócи x, y, z, вся логика рассуждений в основном остаётся прежней.

Другими словами, мы будем рассматривать ускорение $\vec{a}\,(\alpha\; i)$ как векторную функцию двух нечисловых переменных — акселератора α и тела i, то есть:

$$a : \mathfrak{N} \times \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\alpha\; i) \;\longmapsto\; a_\mu(\alpha\; i) = \{a_x(\alpha\; i),\;\; a_y(\alpha\; i),\;\; a_z(\alpha\; i)\},$$

где $\mu = x, y, z.$

Полагая

$$a_\mu(\alpha\; i) = f_\mu\, \frac{1}{m(i)},$$

находим, что однотипные компоненты четырёх ускорений

$$a_\mu(\alpha\; i),\; a_\mu(\alpha\; k),\; a_\mu(\beta\; i),\; a_\mu(\beta\; k)$$

связаны между собой хорошо известным соотношением:

$$\begin{vmatrix} a_\mu(\alpha\; i) & a_\mu(\alpha\; k) \\ a_\mu(\beta\; i) & a_\mu(\beta\; k) \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad (23)$$

В принципе, три компоненты ускорения $a_\mu(\alpha\, i)$ могут быть представлены в виде произведения двух физических величин, характеризующих акселератор α и тело i, двумя способами:

$$a_\mu(\alpha\; i) \begin{cases} \nearrow\; a_\mu(\alpha\; i) = \xi_\mu(\alpha)\; x(i) \\[2ex] \searrow\; \tilde{a}_\mu(\alpha\; i) = \tilde{\xi}(\alpha)\; \tilde{x}_\mu(i) \end{cases}$$

где $\xi_\mu(\alpha) = f_\mu(\alpha)$ – **вектор** силы, характеризующей акселератор α,
$x(i) = \frac{1}{m(i)}$; $m(i)$ – **скалярная** масса, характеризующая тело i;

$\tilde{\xi}(\alpha) = \tilde{f}(\alpha)$ – гипотетическая **скалярная** сила, характеризующая акселератор α,

$\tilde{x}_\mu(i) = \left(\frac{1}{m(i)}\right)_\mu$ – гипотетический **вектор** обратной массы, характеризующий тело i ;

Какими свойствами должны обладать компоненты ускорения $a_\mu(\alpha\ i)$ в первом случае, и компоненты ускорения $\tilde{a}_\mu(\alpha\ i)$ – во втором?

Можно ли опытным путём установить, является ли масса скаляром, а сила – вектором?

Легко видеть, что в первом случае, когда масса – скаляр, сила – вектор и компоненты ускорения имеют вид $a_\mu(\alpha\ i) = \xi_\mu(\alpha)\ x(i)$, выполняются следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} a_\mu(\alpha\ i) & a_\mu(\alpha\ k) \\ a_\nu(\beta\ i) & a_\nu(\beta\ k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_\mu(\alpha)\ x(i) & \xi_\mu(\alpha)\ x(k) \\ \xi_\nu(\beta)\ x(i) & \xi_\nu(\beta)\ x(k) \end{vmatrix} \equiv 0. \tag{24}$$

При этом имеют место следующие неравенства:

$$\begin{vmatrix} a_\mu(\alpha\ i) & a_\mu(\beta\ i) \\ a_\nu(\alpha\ k) & a_\nu(\beta\ k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_\mu(\alpha)\ x(i) & \xi_\mu(\beta)\ x(i) \\ \xi_\nu(\alpha)\ x(k) & \xi_\nu(\beta)\ x(k) \end{vmatrix} =$$

$$= x(i)\ x(k) \begin{vmatrix} \xi_\mu(\alpha) & \xi_\mu(\beta) \\ \xi_\nu(\alpha) & \xi_\nu(\beta) \end{vmatrix} \not\equiv 0. \tag{25}$$

Если же имеет место второй гипотетический случай (масса – вектор, а сила – скаляр), то легко убедиться в том, что возникает противоположная ситуация:

$$\begin{vmatrix} a_\mu(\alpha\ i) & a_\mu(\alpha\ k) \\ a_\nu(\beta\ i) & a_\nu(\beta\ k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi(\alpha)\ x_\mu(i) & \xi(\alpha)\ x_\mu(k) \\ \xi(\beta)\ x_\nu(i) & \xi(\beta)\ x_\nu(k) \end{vmatrix} =$$

$$= \xi(\alpha)\ \xi(\beta) \begin{vmatrix} x_\mu(i) & x_\mu(k) \\ x_\nu(i) & x_\nu(k) \end{vmatrix} \not\equiv 0,$$

но при этом имеют место следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} a_\mu(\alpha\ i) & a_\mu(\beta\ i) \\ a_\nu(\alpha\ k) & a_\nu(\beta\ k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi(\alpha)\ x_\mu(i) & \xi(\beta)\ x_\mu(i) \\ \xi(\alpha)\ x_\nu(k) & \xi(\beta)\ x_\nu(k) \end{vmatrix} \equiv 0$$

Итак, при рассмотрении одномерного движения мы обнаруживаем между множеством акселераторов $\mathfrak{N}$ и множеством тел $\mathfrak{M}$ определённое равноправие; и акселераторы, и тела характеризуются скалярными силой f и массой m .

Однако при рассмотрении случаев двумерного и трёхмерного движений мы замечаем, что равноправие между множествами $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ нарушается; тела попрежнему характеризуются скалярной массой $m(i)$, а акселераторы характеризуются вектором силы $f_\mu(\alpha)$.

Эта асимметрия проявляется в существовании двух качественно различных матриц A и $\tilde{A}$, состоящих из численных значений компонент ускорений:

$$A = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} a_x(\alpha\ i) & a_x(\alpha\ k) & a_x(\alpha\ m) & \cdots \\ a_y(\alpha\ i) & a_y(\alpha\ k) & a_y(\alpha\ m) & \cdots \\ a_z(\alpha\ i) & a_z(\alpha\ k) & a_z(\alpha\ m) & \cdots \\ \hline a_x(\beta\ i) & a_x(\beta\ k) & a_x(\beta\ m) & \cdots \\ a_y(\beta\ i) & a_y(\beta\ k) & a_y(\beta\ m) & \cdots \\ a_z(\beta\ i) & a_z(\beta\ k) & a_z(\beta\ m) & \cdots \\ \hline a_x(\gamma\ i) & a_x(\gamma\ k) & a_x(\gamma\ m) & \cdots \\ a_y(\gamma\ i) & a_y(\gamma\ k) & a_y(\gamma\ m) & \cdots \\ a_z(\gamma\ i) & a_z(\gamma\ k) & a_z(\gamma\ m) & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right\}$$

$$\tilde{A} = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} a_x(\alpha\ i) & a_x(\beta\ i) & a_x(\gamma\ i) & \cdots \\ a_y(\alpha\ i) & a_y(\beta\ i) & a_y(\gamma\ i) & \cdots \\ a_z(\alpha\ i) & a_z(\beta\ i) & a_z(\gamma\ i) & \cdots \\ \hline a_x(\alpha\ k) & a_x(\beta\ k) & a_x(\gamma\ k) & \cdots \\ a_y(\alpha\ k) & a_y(\beta\ k) & a_y(\gamma\ k) & \cdots \\ a_z(\alpha\ k) & a_z(\beta\ k) & a_z(\gamma\ k) & \cdots \\ \hline a_x(\alpha\ m) & a_x(\beta\ m) & a_x(\gamma\ m) & \cdots \\ a_y(\alpha\ m) & a_y(\beta\ m) & a_y(\gamma\ m) & \cdots \\ a_z(\alpha\ m) & a_z(\beta\ m) & a_z(\gamma\ m) & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right\}$$

Неравноправие скалярной массы m и векторной силы $\vec{f}$ проявляется в неравноправии матриц A и $\tilde{A}$. Как это следует из равенств (23) и (24) и неравенств (25) только матрица A имеет ранг равный единице, в то время как матрица $\tilde{A}$ этим свойством не обладает.

Итак, вся информация о наиболее глубоких закономерностях отношений между телами и акселераторами заложена именно в матрице A, и Второй закон механики Ньютона в его традиционной векторной формулировке

$$m\vec{a} = \vec{f}$$

есть не что иное как неявное выражение основного и единственного её замечательного свойства:

$$\boxed{\textbf{ранг матрицы A равен единице}}$$

§ 10. Законы аддитивности сил и масс.

Итак, в § **8** мы показали, что из фундаментального соотношения

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha i} & a_{\alpha k} \\ a_{\beta i} & a_{\beta k} \end{vmatrix} = 0$$

следует факт существования двух сакральных инвариантов

$$f(\alpha, \varepsilon) = \varphi(\alpha, \varepsilon) = \frac{a_{\alpha e}}{a_{\varepsilon e}}$$

$$m(i, e) = \mu(i, e) = \frac{a_{\varepsilon e}}{a_{\varepsilon i}}$$

характеризующих, соответственно, акселератор α и тело i.

Но при этом возникает новый вопрос – а как ведут себя эти инварианты при композиции акселераторов и тел?

Это новая физическая проблема, и здесь при её решении мы будем опираться на опыт.

Этот опыт состоит в следующем.

1. Рассмотрим произвольное тело i и два произвольных акселератора α и β и измерим три ускорения:

ускорения $a_{\alpha i}$ и $a_{\beta i}$ и ускорение $a_{\alpha\oplus\beta\ i}$ тела i при одновременном действии акселераторов α и β.

Опыт показывает, что имеет место следующее соотношение, справедливое при любых α, β и i:

$$a_{\alpha\oplus\beta\ i} = a_{\alpha i} + a_{\beta i}. \tag{26}$$

Подставляя в (26) выражения

$$a_{\alpha i} = \varphi(\alpha, \varepsilon)\ a_{\varepsilon e}\ \mu(e, i),$$

$$a_{\beta i} = \varphi(\beta, \varepsilon)\ a_{\varepsilon e}\ \mu(e, i),$$

$$a_{\alpha\oplus\beta\ i} = \varphi(\alpha \oplus \beta, \varepsilon)\ a_{\varepsilon e}\ \mu(e, i),$$

получим, что сакральный инвариант $\varphi(\alpha, \varepsilon)$ и равная ему сила f_α, обладают *свойством аддитивности*:

$$\boxed{\begin{gathered} \varphi(\alpha \oplus \beta, \varepsilon) = \varphi(\alpha, \varepsilon) + \varphi(\beta, \varepsilon) \\[2ex] f_{\alpha\oplus\beta} = f_\alpha + f_\beta \end{gathered}}$$

Укажем на ещё одну форму записи закона аддитивности сил:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & f_{\alpha\oplus\delta} & f_{\alpha\oplus\vartheta} \\ 1 & f_{\beta\oplus\delta} & f_{\beta\oplus\vartheta} \end{vmatrix} = f_{\alpha\oplus\vartheta} + f_{\beta\oplus\delta} - f_{\alpha\oplus\delta} - f_{\beta\oplus\vartheta} = 0.$$

Как мы увидим в Части V, равенство нулю этого определителя Кели-Менгера указывает на существование на множестве акселераторов $\mathfrak{N}$ аддитивной физической структуры ранга (2, 2).

2. Рассмотрим далее два произвольных тела i и k и один произвольный акселератор α и измерим три ускорения:

ускорения $a_{\alpha i}$ и $a_{\alpha k}$ и ускорение $a_{\alpha, i \oplus k}$ тела, полученного путём объединения в одно целое тел i и k, при действии акселератора α.

Как и в предыдущем случае, результаты трёх измерений оказываются связанными между собой. Однако, в отличие от предыдущего, эта связь имеет несколько иной вид:

$$\frac{1}{a_{\alpha, i \oplus k}} = \frac{1}{a_{\alpha i}} + \frac{1}{a_{\alpha k}} \tag{27}$$

Подставляя в (27) выражения

$$a_{\alpha i} = \varphi(\alpha, \varepsilon)\ a_{\varepsilon e}\ \mu(e, i),$$

$$a_{\alpha k} = \varphi(\alpha, \varepsilon)\ a_{\varepsilon e}\ \mu(e, k),$$

$$a_{\alpha, i \oplus k} = \varphi(\alpha, \varepsilon)\ a_{\varepsilon e}\ \mu(e, i \oplus k),$$

получим, что сакральный инвариант

$$\mu(i, e) = \frac{1}{\mu(e, i)},$$

и, следовательно, пропорциональная ему масса m_i, обладают *свойством аддитивности*:

$$\boxed{\begin{gathered} \mu(i \oplus k, e) = \mu(i, e) + \mu(k, e) \\[2ex] m_{i \oplus k} = m_i + m_k \end{gathered}}$$

Закон аддитивности масс может быть записан ещё в одном виде, явно указывающем на факт существования на множестве тел $\mathfrak{M}$ аддитивной физической структуры ранга (2,2):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & m_{i \oplus p} & m_{i \oplus q} \\ 1 & m_{k \oplus p} & m_{k \oplus q} \end{vmatrix} = m_{i \oplus q} + m_{k \oplus p} - m_{i \oplus p} - m_{k \oplus q} = 0.$$

§ 11. Закон Ньютона в случае движения в неинерциальной системе отсчёта. Первый сакральный инвариант b_σ .

До сих пор мы рассматривали движение материальной точки в инерциальной системе отсчёта. Но что такое инерциальная система? Можно ли экспериментальным путём установить, является ли данная система отсчёта инерциальной или нет?

Чтобы ответить на эти вопросы и ещё глубже понять физический смысл фундаментального закона механики – закона Ньютона, откажемся с самого начала от понятия “инерциальной системы отсчёта” и наряду с рассмотренными выше множеством тел $\mathfrak{M}$ и множеством акселераторов $\mathfrak{N}$ рассмотрим множество систем отсчёта (для простоты – одномерных), произвольно движущихся друг относительно друга

$$\mathfrak{S} = \{\sigma, \lambda, \ldots\}$$

Измеряя ускорения

$$\tilde{a}(\alpha\ i; \sigma) = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{\alpha i;\sigma}$$

различных тел i, k, ... под действием акселераторов α, β, ... в различных системах отсчёта σ, λ, ..., мы тем самым задаём числовую функцию $\tilde{a}(\alpha\ i; \sigma)$ трёх нечисловых переменных

$$\tilde{a} : \mathfrak{N} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{S} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\alpha,\ i,\ \sigma) \longmapsto \tilde{a}_{\alpha i;\sigma}$$

(простоты ради мы ограничиваемся здесь рассмотрением одномерного движения), значения которой можно рассматривать как элементы трёхмерной матрицы.

Как известно, закон Ньютона в случае движения в одномерной неинерциальной системе отсчёта имеет вид:

$$m_i\ \tilde{a}_{\alpha i;\sigma} = f_\alpha - m_i\ b_\sigma, \tag{28}$$

где b_σ – ускорение системы отсчёта σ относительно “первоначальной” инерциальной системы.

Перепишем уравнение (28) в сакрально-инвариантном виде, не содержащем ни массы m_i , ни силы f_α .

Для этого рассмотрим два акселератора α и β и два ускоряемых тела i и k и запишем четыре уравнения:

$$m_i(\tilde{a}_{\alpha i;\sigma} + b_\sigma) = f_\alpha, \qquad m_i(\tilde{a}_{\beta i;\sigma} + b_\sigma) = f_\beta,$$

$$m_k(\tilde{a}_{\alpha k;\sigma} + b_\sigma) = f_\alpha, \qquad m_k(\tilde{a}_{\beta k;\sigma} + b_\sigma) = f_\beta,$$

Исключая из написанных четырёх уравнений четыре неизвестные f_α, f_β, m_i и m_k, получим следующее соотношение между ускорениями $\tilde{a}_{\alpha i;\sigma}$, $\tilde{a}_{\beta i;\sigma}$, $\tilde{a}_{\alpha k;\sigma}$, $\tilde{a}_{\beta k;\sigma}$, содержащее один, пока неизвестный параметр b_σ:

$$(\tilde{a}_{\alpha i;\sigma}+b_\sigma)\,(\tilde{a}_{\beta k;\sigma}+b_\sigma)-(\tilde{a}_{\alpha k;\sigma}+b_\sigma)\,(\tilde{a}_{\beta i;\sigma}+b_\sigma)=0. \tag{29}$$

Итак, мы видим, что ускорения $\tilde{a}_{\alpha i;\sigma}$, $\tilde{a}_{\beta i;\sigma}$, $\tilde{a}_{\alpha k;\sigma}$, $\tilde{a}_{\beta k;\sigma}$ входят в соотношение (27) в виде одной и той же комбинации с b_σ. Таким образом, существует вполне определённая функция одной переменной x и одного параметра b_σ

$$\chi(x)=x+b_\sigma,$$

преобразующая измеряемые на опыте “эмпирические” ускорения $\tilde{a}_{\alpha i;\sigma}$ в новые величины

$$a_{\alpha i}=\chi(\tilde{a}_{\alpha i;\sigma})=\tilde{a}_{\alpha i;\sigma}+b_\sigma, \tag{30}$$

Таким образом, фундаментальное соотношение между ускорениями a имеет уже знакомый вид:

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha i} & a_{\beta i} \\ a_{\alpha k} & a_{\beta k} \end{vmatrix}=0. \tag{31}$$

Чтобы придать соотношениям (29) и (30) статус физического закона, необходимо указать рецепт, по которому можно измерять величину b_σ, входящую в качестве слагаемого в ускорение $a_{\alpha i}$.

Воспользовавшись уравнением (29) легко находим **первый сакральный инвариант,** не зависящий ни от выбора акселераторов γ и δ, ни от выбора ускоряемых тел m и n

$$\boxed{b_\sigma=-\frac{\tilde{a}_{\gamma n;\sigma}\,\tilde{a}_{\delta m;\sigma}-\tilde{a}_{\gamma m;\sigma}\,\tilde{a}_{\delta n;\sigma}}{\tilde{a}_{\gamma n;\sigma}+\tilde{a}_{\delta m;\sigma}-\tilde{a}_{\gamma m;\sigma}-\tilde{a}_{\delta n;\sigma}},} \tag{32}$$

где m и n – произвольно выбранные тела,
γ и δ – произвольно выбранные акселераторы.

Итак, физическая величина $a_{\alpha i}$, равная сумме двух непосредственно измеряемых на опыте величин $\tilde{a}_{\alpha i;\sigma}$ и b_σ, каждая из которых существенным образом зависит от выбора системы отсчёта σ, взятая как единое целое, не зависит от выбора σ, то есть

$$a_{\alpha i}=\tilde{a}_{\alpha i;\sigma}+b_\sigma=\tilde{a}_{\alpha i;o}$$

Таким образом, b_σ представляет собой некоторый “компенсирующий” член, исправляющий “неинерционность” системы отсчёта σ.

Инерциальной системой отсчёта $o\in\mathfrak{S}$ мы будем называть такую систему $\sigma\in\mathfrak{S}$, для которой первый сакральный инвариант тождественно равен нулю:

$$b_\sigma=0.$$

Итак, величины $\tilde{a}_{\alpha i;\sigma}$, $a_{\alpha i}$ и b_σ допускают простую физическую интерпретацию:

$\tilde{a}_{\alpha i;\sigma}$ – это ускорение тела i под действием акселератора α , измеренное в неинерциальной системе отсчёта;

$a_{\alpha i}$ – это ускорение тела i относительно "первичной" инерциальной системы отсчёта o ;

b_σ – это ускорение само́й неинерциальной системы отсчёта σ относительно "первичной" инерциальной системы отсчёта o .

§ 12. Почему "сила тяготения" не является силой?

Для того, чтобы понять особую природу "силы тяготения" рассмотрим лабораторию, находящуюся в космическом аппарате, который с помощью реактивного двигателя перемещается в пространстве с ускорением $\vec{a}_0$. Можно ли, находясь внутри этого аппарата, измерить ускорение $\vec{a}_0$ и "силу тяготения" со стороны массивного тела с массой M , укреплённого на стенке аппарата?

Рассмотрим три случая:

1. тяготеющее тело M отсутствует;

2. тяготеющее тело M действует на тело i с массой m в том же направлении, что и сила f_α ;

3. тяготеющее тело M действует на тело i в противоположном направлении, нежели сила f_α .

Во всех трёх случаях будем поступать следующим образом:

- возьмём два произвольных тела i и k и два произвольных акселератора α и β , измерим четыре ускорения

$$\tilde{a}(\alpha\ i),\ \tilde{a}(\alpha\ k),\ \tilde{a}(\beta\ i),\ \tilde{a}(\beta\ k)$$

и найдём значение первого сакрального инварианта:

$$b = -\frac{\tilde{a}(\alpha\ i)\ \tilde{a}(\beta\ k) - \tilde{a}(\alpha\ k)\ \tilde{a}(\beta\ i)}{\tilde{a}(\alpha\ i) + \tilde{a}(\beta\ k) - \tilde{a}(\alpha\ k) - \tilde{a}(\beta\ i)},$$

- возьмём произвольный акселератор α , эталонный акселератор ε и эталонное тело e , измерим два ускорения

$$\tilde{a}(\alpha\ e),\ \tilde{a}(\varepsilon\ e)$$

и найдём значение второго сакрального инварианта – силы

$$f(\alpha,\varepsilon) = \frac{\tilde{a}(\alpha\ e) + b}{\tilde{a}(\alpha\ e) + b},$$

- возьмём произвольное тело i , эталонный акселератор ε и эталонное тело e , измерим два ускорения

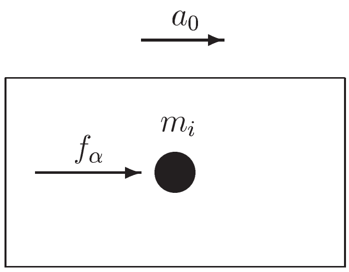
$$\tilde{a}(\varepsilon\ i),\ \tilde{a}(\varepsilon\ e)$$

и найдём значение третьего сакрального инварианта – массы

$$m(i,e) = \frac{\tilde{a}(\varepsilon\ e) + b}{\tilde{a}(\varepsilon\ i) + b}.$$

В результате получим

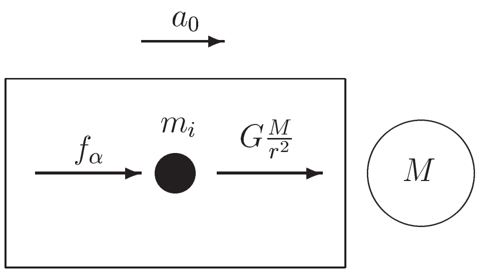
◇ в первом случае



$\tilde{a}_1(\alpha\ i)$

$b = a_0$ $\quad f = f_\alpha$ $\quad m = m_i$

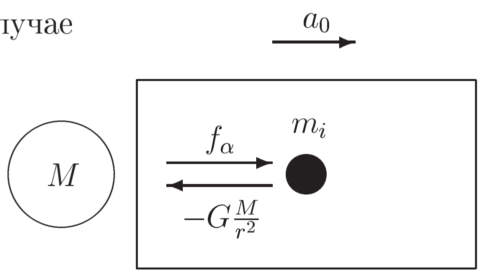
◇ во втором случае



$\tilde{a}_2(\alpha\ i)$

$b = a_0 - G\frac{M}{r^2}$ $\quad f = f_\alpha$ $\quad m = m_i$

◇ в третьем случае



$\tilde{a}_3(\alpha\ i)$

$b = a_0 + G\frac{M}{r^2}$ $\quad f = f_\alpha$ $\quad m = m_i$

Итак, мы видим, что “сила тяготения” не складывается с “нормальной” силой f_α акселератора α; она вызывает эффект, эквивалентный уменьшению ускорения системы отсчёта во втором случае и увеличения его – в третьем случае.

Этот факт находится в полном согласии с выводами общей теории относительности [18].

§ 13. Предпосылки Теории физических структур, содержащиеся в законе Ньютона.

Рассматриваемый с этой точки зрения анализ столь же широк, как и сама природа... Главным его атрибутом является ясность; в нём нет знаков для обозначения неопределённых понятий.

— Жан Батист Фурье (1768–1830)

Рассмотрим второй закон механики Ньютона в его традиционной форме:

$$ma = f \tag{33}$$

Входящие в него физические величины – масса m и сила f с одной стороны, и ускорение a с другой, имеют, вообще говоря, различную математическую природу. Так, масса m зависит от ускоряемого тела i и не зависит от акселератора α, сообщающего телу i ускорения a; сила f, напротив, зависит от акселератора α и не зависит от тела i. Что же касается ускорения a, то оно зависит как от тела i, так и от акселератора α.

Таким образом, масса m_i является некоторой вещественной функцией **одной** нечисловой переменной – тела i, т. е.

$$m : \mathfrak{M} \to \mathbb{R},$$

где $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$ – множество всех ускоряемых тел $i, k, \ldots$; $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел; сила f_α является другой вещественной функцией **одной** нечисловой переменной – акселератора α, т. е.

$$f : \mathfrak{N} \to \mathbb{R},$$

где $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ – множество всех акселераторов $\alpha, \beta, \ldots$;

ускорение же $a_{\alpha i}$ является вещественной функцией **двух** нечисловых переменных – тела i и акселератора α, т. е.

$$a : \mathfrak{N} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}.$$

Итак, специально выделяя независимые нечисловые переменные $\alpha \in \mathfrak{N}$ и $i \in \mathfrak{M}$, перепишем закон Ньютона (33) в виде:

$$m_i a_{\alpha i} = f_\alpha \tag{34}$$

Таким образом, закон Ньютона, записанный в виде (34), представляет собой связь между существенно разнородными физическими величинами: **одноиндексными** массой m_i и силой f_α с одной стороны и **двухиндексным** ускорением $a_{\alpha i}$ с другой, т. е.

$$a_{\alpha i} = a(f_\alpha, m_i,) = \frac{f_\alpha}{m_i}.$$

Обратим внимание на то, что тело i характеризуется **одним** $(m = 1)$ параметром – массой m_i и акселератор α характеризуется **одним**[34] $(n = 1)$ параметром – силой f_α. Другими словами, и множество тел $\mathfrak{M}$ и множество акселераторов $\mathfrak{N}$ – одномерны.

Назовём соотношение

$$a_{\alpha i} = \xi_\alpha x_i, \tag{35}$$

где $\xi_\alpha = f_\alpha$, $x_i = \frac{1}{m_i}$ **канонической** формой Второго закона механики Ньютона.

Заметим, что, строго говоря, единственными измеряемыми величинами в механике являются координаты, время, скорость и, в конечном итоге, ускорение. В связи с этим перепишем закон Ньютона (34) в виде, не содержащем ни массы m_i, ни силы f_α.

Чтобы исключить все массы и силы, нужно взять, по крайней мере, **два** $(r = 2)$ тела i и k и **два** $(s = 2)$ акселератора α и β и записать четыре $(k = r \cdot s = 2 \cdot 2)$ равенства

$$\begin{array}{ll} a_{\alpha i} = \dfrac{f_\alpha}{m_i} & a_{\alpha k} = \dfrac{f_\alpha}{m_k} \\[2ex] a_{\beta i} = \dfrac{f_\beta}{m_i} & a_{\beta k} = \dfrac{f_\beta}{m_k} \end{array}, \tag{36}$$

содержащие четыре $(N = m \cdot r + n \cdot s = 4)$ неизвестных $m_i, m_k, f_\alpha, f_\beta$.

Здесь и в дальнейшем через r и s мы будем обозначать то минимальное число элементов, которое нужно взять, соответственно из множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, чтобы исключить из соответствующей системы уравнений все параметры $x^1(i), \ldots, x^m(i)$, характеризующие элемент $i \in \mathfrak{M}$ и все параметры $\xi(\alpha)_1, \ldots, \xi(\alpha)_n$, характеризующие элемент $\alpha \in \mathfrak{N}$.

Пару (s, r) мы будем называть **рангом** физической структуры, а пару (n, m) – размерностью множеств $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$.

Итак, мы имеем четыре уравнения (36), содержащих четыре неизвестные $m_i,\, m_k,\, f_\alpha,\, f_\beta$. Особенность этой системы уравнений состоит в том, что из неё можно исключить все неизвестные $m_i,\, m_k,\, f_\alpha,\, f_\beta$, получив при этом одно соотношение между $a_{\alpha i},\, a_{\alpha k},\, a_{\beta i},\, a_{\beta k}$, но нельзя выразить $m_i,\, m_k,\, f_\alpha,\, f_\beta$ через ускорения $a_{\alpha i},\, a_{\alpha k},\, a_{\beta i},\, a_{\beta k}$.

Таким образом, исключая из написанных **четырёх** уравнений (36) **четыре** неизвестные $m_i,\, m_k,\, f_\alpha,\, f_\beta$, получаем следующее соотношение между четырьмя

[34] Имеется в виду простейший случай одномерного движения.

ускорениями:

$$a_{\alpha i}a_{\beta k} - a_{\alpha k}a_{\beta i} = 0 \tag{37}$$

или в виде, разрешённом относительно $a_{\alpha i}$:

$$a_{\alpha i} = a_{\alpha k}\frac{1}{a_{\beta k}}a_{\beta i} \tag{38}$$

Примечательно, что закон Ньютона, записанный в виде (37) или (38), имеет явно выраженный универсальный характер, так как не зависит ни от выбора двух тел $i,\, k \in \mathfrak{M}$, ни от выбора **двух** акселераторов $\alpha,\, \beta \in \mathfrak{N}$ т. е.

$$\forall i, k \in \mathfrak{M} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{N}$$

$$\begin{matrix} \Phi(a_{\alpha i}, & a_{\alpha k}, \\ a_{\beta i}, & a_{\beta k}) \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_{\alpha i} & a_{\alpha k} \\ a_{\beta i} & a_{\beta k} \end{vmatrix} = 0 \tag{39}$$

Соотношения (37), (38), (39) мы будем называть Вторым законом механики Ньютона в **сакрально-инвариантной** форме.

Подчеркнём, что эти соотношения не содержат ничего, кроме измеряемых на опыте ускорений, и могут быть подвергнуты непосредственной экспериментальной проверке.

Итак, мы получили фундаментальное соотношение (39) как достаточно тривиальное следствие из закона Ньютона, записанного в канонической форме (35). Но при этом существенно, что здесь возможен и обратный переход: приняв в качестве исходного опытного факта факт существования соотношения (39) между четырьмя измеряемыми на опыте ускорениями $a_{\alpha i},\, a_{\alpha k},\, a_{\beta i},\, a_{\beta k}$, мы можем снова получить отсюда Второй закон механики Ньютона в канонической форме (35).

Действительно, назовём одно из тел (например, тело k) и один из акселераторов (например, акселератор β) "эталонными" и переобозначим их, соответственно, через $\overline{1}$ и $\underline{1}$. Полагая в (38) $k = \overline{1}$, $\beta = \underline{1}$ будем иметь:

$$a_{\alpha i} = a_{\alpha\overline{1}}\frac{1}{a_{\underline{1}\overline{1}}}a_{\underline{1}i} = \frac{a_{\underline{1}\overline{1}}}{c_1}\cdot\frac{a_{\alpha\overline{1}}}{a_{\underline{1}\overline{1}}}\cdot c_1\frac{a_{\underline{1}i}}{a_{\underline{1}\overline{1}}}, \tag{40}$$

где c_1 – произвольная постоянная.

Сравнивая (40) с (35), получим Второй закон механики Ньютона в канонической форме

$$a_{\alpha i} = \xi_\alpha x_i = \frac{f_\alpha}{m_i}$$

если положим

$$\xi_\alpha = f_\alpha = c_1\frac{a_{\alpha\overline{1}}}{a_{\underline{1}\overline{1}}}.$$

$$x_i = \frac{1}{m_i} = \frac{a_{\underline{1}\overline{1}}}{c_1}\cdot\frac{a_{\underline{1}i}}{a_{\underline{1}\overline{1}}}$$

Постоянная c_1 (и аналогичные постоянные в других случаях) существенно связана с выбором системы единиц и обеспечивает таким образом определённую свободу выбора значений массы и силы. Формально постоянная c_1 возникает из-за того, что x_i и ξ_α не определяются однозначно, так как существует однопараметрическая группа преобразований

$$\begin{matrix} x = \dfrac{1}{c_1}\overline{x} & & m = c_1\overline{m} \\ & \text{или} & \\ \xi = c_1\overline{\xi} & & f = c_1\overline{f} \end{matrix},$$

сохраняющая вид выражения

$$a_{\alpha i} = \xi_\alpha x_i = \overline{\xi}_\alpha \overline{x}_i$$

или

$$a_{\alpha i} = \frac{f_\alpha}{m_i} = \frac{\overline{f}_\alpha}{\overline{m}_i}.$$

Итак, мы показали, что Второй закон Ньютона может быть записан в двух эквивалентных формах:

в канонической

$$a_{\alpha i} = \varphi(\xi_\alpha x_i) = \xi_\alpha x_i = \frac{f_\alpha}{m_i}$$

и в сакрально-инвариантной

$$\Phi(\begin{matrix} a_{\alpha i}, & a_{\alpha k}, \\ a_{\beta i}, & a_{\beta k}) \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_{\alpha i} & a_{\alpha k} \\ a_{\beta i} & a_{\beta k} \end{vmatrix} = 0$$

или в виде, разрешённом относительно $a_{\alpha i}$:

$$a_{\alpha i} = f(a_{\alpha k}, a_{\beta k}, a_{\beta i})$$

$$a_{\alpha i} = a_{\alpha k}\frac{1}{a_{\beta k}}a_{\beta i}$$

Другими словами, мы можем сказать, что ускорение $a_{\alpha i}$ произвольного тела i под действием произвольного акселератора α зависит от ускорения $a_{\beta i}$ тела i под действием эталонного акселератора β , от ускорения $a_{\alpha k}$ эталонного тела k под действием акселератора α и, наконец, от ускорения $a_{\beta k}$ эталонного тела k под действием эталонного акселератора β . То есть Закон Ньютона представляет собой сакральное отношение между двумя кортами левым и правым $\langle\alpha\,\beta|$ и $|i\,k\rangle$ (см.рис. 1).

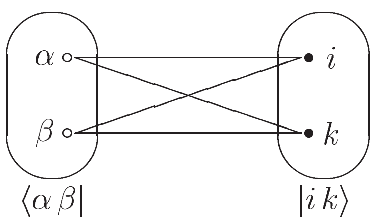


Рис. 1.

§ 14. Предварительное определение физической структуры ранга (2, 2).

Опираясь на рассмотренный пример, сформулируем понятие физической структуры ранга (2,2):

Рассмотрим два множества:

$\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$ – множество ускоряемых тел и

$\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$. – множество акселераторов (ускорителей).

Предварительный характер этого определения состоит в том, что с самого начала мы требуем существования следующих двух отображений

$$z : \mathfrak{M} \to \mathbb{R} \qquad i \mapsto z(i) \qquad \text{и} \qquad \zeta : \mathfrak{N} \to \mathbb{R} \qquad \alpha \mapsto \zeta(\alpha).$$

Мы будем говорить, что на множествах $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ размерности (1,1) определена **физическая структура ранга (2,2)**, если существует вещественная функция двух вещественных переменных

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (\zeta, z) \mapsto \varphi(\zeta, z)$$

такая, что четыре функции

$$\begin{array}{c|cc} & z_1 & z_2 \\ \hline \zeta_1 & \varphi(\zeta_1, z_1) & \varphi(\zeta_1, z_2) \\ \zeta_2 & \varphi(\zeta_2, z_1) & \varphi(\zeta_2, z_2) \end{array}$$

образованные из функции $\varphi(\zeta, z)$ путём всевозможной замены переменных ζ и z на новые независимые переменные

$$\zeta \to \zeta_1, \zeta_2 \qquad \text{и} \qquad z \to z_1, z_2$$

связаны между собой соотношением

$$\begin{matrix} \Phi(\varphi(\zeta_1, z_1), & \varphi(\zeta_1, z_2), \\ \varphi(\zeta_2, z_1), & \varphi(\zeta_2, z_2)) \end{matrix} \equiv 0 \tag{41}$$

или

$$\varphi(\zeta_1, z_1) = f(\varphi(\zeta_1, z_2), \varphi(\zeta_2, z_2), \varphi(\zeta_2, z_1)) \tag{42}$$

представляющими собой тождество относительно независимых переменных ζ_1, ζ_2, z_1, z_2 .

Не случайно в этом определении физической структуры ничего не говорится о "физической природе" элементов из множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Важно лишь, что каждый элемент i из множества $\mathfrak{M}$ характеризуется каким-либо одним числовым параметром z_i , а элемент α из множества $\mathfrak{N}$ – каким-либо одним числовым параметром ζ_α . Далее существенно, что существует какая-то (заранее неизвестная) числовая функция $\varphi(\zeta_\alpha, z_i)$, характеризующая парные отношения между элементами $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{M}$. И, наконец, самое главное, чтобы её числовые значения

$$\begin{matrix} \varphi(\zeta_\alpha, z_i) & \varphi(\zeta_\alpha, z_k) \\ \varphi(\zeta_\beta, z_i) & \varphi(\zeta_\beta, z_k) \end{matrix}$$

были бы связаны между собой какой-то (тоже заранее неизвестной) функциональной зависимостью

$$\Phi(\varphi(\zeta_\alpha, z_i), \varphi(\zeta_\alpha, z_k), \varphi(\zeta_\beta, z_i), \varphi(\zeta_\beta, z_k)) \equiv 0$$

или

$$\varphi(\zeta_\alpha, z_i) = f(\varphi(\zeta_\alpha, z_k), \varphi(\zeta_\beta, z_k), \varphi(\zeta_\beta, z_i))$$

тождественной относительно выбора переменных $\zeta_\alpha, \zeta_\beta, z_i, z_k$
где

$$\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

две непрерывные и достаточное число раз дифференцируемые функции, соответственно, четырёх и трёх вещественных переменных.

Оказывается, и это составляет основное содержание и весь пафос Теории физических структур, эти весьма общие требования фактически однозначно (с точностью до строго определённой эквивалентности) определяют конкретный вид функций φ и f (или Φ), в свою очередь определяющих ещё до всякой физической интерпретации, единственно возможную каноническую и сакрально-инвариантную формы физического закона.

Это обстоятельство открывает перед теоретической физикой новые возможности, позволяя свести все мыслимые физические законы к небольшому числу сакральных физических законов, вид которых определяется требованиями сакральной инвариантности.

Итак, задача состоит в том, чтобы найти неизвестные функции $\varphi(\zeta, z)$ и

$$\begin{matrix}\Phi(\varphi_{11}, & \varphi_{12}, \\ \varphi_{21}, & \varphi_{22})\end{matrix} \qquad \text{или} \qquad f(\varphi_{12}, \varphi_{22}, \varphi_{21}),$$

обращающие равенства (41) и (42) в тождества относительно системы независимых переменных $\zeta_1, \zeta_2; z_1, z_2$.

Собственно говоря, Теория физических структур и началась с решения этой задачи.

Мною было показано [3], что функциональное уравнение

$$\forall\ \xi_1,\ \xi_2;\ x^1,\ x^2\ \in \mathbb{R}$$

$$\begin{matrix}\Phi(\varphi(\xi_1, x^1), & \varphi(\xi_1, x^2), \\ \varphi(\xi_2, x^1), & \varphi(\xi_2, x^2))\end{matrix} \equiv 0$$

относительно двух неизвестных функций

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

и

$$\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

имеет два и только два решения, определённые с точностью до эквивалентности, которые могут быть записаны в двух эквивалентных друг другу формах:

аддитивной

$$\varphi_1(\eta, z) = A_{\lambda;\alpha,f}(\eta, z) = \lambda(\alpha(\eta) + f(z))$$

$$\Phi_1\begin{pmatrix}\varphi_{11}, & \varphi_{12}, \\ \varphi_{21}, & \varphi_{22}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda^{-1}(\varphi_{11}) & \lambda^{-1}(\varphi_{12}) \\ -1 & \lambda^{-1}(\varphi_{21}) & \lambda^{-1}(\varphi_{22}) \end{vmatrix} = \lambda^{-1}(\varphi_{12}) + \lambda^{-1}(\varphi_{21}) - \lambda^{-1}(\varphi_{11}) - \lambda^{-1}(\varphi_{22});$$

и **мультипликативной**

$$\varphi_2(\eta, z) = B_{\chi;\beta,g}(\eta, z) = \chi(\beta(\eta) \cdot g(z));$$

$$\Phi_2\begin{pmatrix}\varphi_{11}, & \varphi_{12}, \\ \varphi_{21}, & \varphi_{22}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \chi^{-1}(\varphi_{11}) & \chi^{-1}(\varphi_{12}) \\ \chi^{-1}(\varphi_{21}) & \chi^{-1}(\varphi_{22}) \end{vmatrix} = \chi^{-1}(\varphi_{11})\chi^{-1}(\varphi_{22}) - \chi^{-1}(\varphi_{12})\chi^{-1}(\varphi_{21});$$

Легко видеть, что общее решение функционального уравнения (41) получается из двух **фундаментальных решений**:

аддитивного

$$a(\xi, x) = \xi + x$$

$$\Phi_1\begin{pmatrix}a_{11}, & a_{12}, \\ a_{21}, & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & a_{11} & a_{12} \\ -1 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12} + a_{21} - a_{11} - a_{22};$$

и мультипликативного

$$b(\eta, y) = \eta \cdot y$$

$$\Phi_2\begin{pmatrix}b_{11}, & b_{12}, \\ b_{21}, & b_{22}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21};$$

путём произвольного преобразования аргументов:

$$a \to \lambda(a) \qquad \xi \to \alpha(\xi) \qquad x \to f(x)$$

$$b \to \chi(b) \qquad \eta \to \beta(\eta) \qquad y \to g(y)$$

Рассмотрим следующие законы преобразования переменных

$$\xi \leftrightarrow \eta \qquad \text{и} \qquad x \leftrightarrow y$$

$$\alpha(\xi) = \ln(\beta(\eta)) \qquad \text{и обратно} \qquad \beta(\eta) = exp(\alpha(\xi))$$

$$f(x) = \ln(g(y) \qquad \text{и обратно} \qquad g(y) = exp(f(x))$$

и следующие суперпозиции функций $\lambda(u)$ и $\chi(v)$

$$\lambda(u) = \chi(exp(u)) \qquad \text{и обратно} \qquad \chi(v) = \lambda(\ln(v))$$

Легко заметить, что аддитивная и мультипликативная формы решения функционального уравнения (41) связаны между собой следующим соотношением:

$$\varphi_1(\xi, x) = A_{\lambda;\alpha,f}(\xi, x) = \lambda(\ln\beta(\eta) + \ln g(y)) =$$
$$= \lambda\big(\ln(\beta(\eta)\cdot g(y))\big) = \chi\big(\beta(\eta)\cdot g(y)\big) = B_{\chi;\beta,g}(\eta, y) = \varphi_2(\eta, y)$$

Итак, можно показать, что вид уравнения Ньютона $m_i a_{\alpha i} = f_\alpha$ и вид непосредственно связанного с ним соотношения

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha i} & a_{\alpha k} \\ a_{\beta i} & a_{\beta k} \end{vmatrix} = 0$$

не являются случайными; они оказываются единственно возможными, если в основание механики положить **принцип сакральной инвариантности** ранга $(s, r) = (2, 2)$, т. е. требование, чтобы четыре ускорения

	i	k
α	$a_{\alpha i}$	$a_{\alpha k}$
β	$a_{\beta i}$	$a_{\beta k}$

относящиеся к двум $(r = 2)$ произвольным телам i и k и к двум $(s = 2)$ произвольным акселераторам α и β были связаны между собой одним функциональным соотношением

$$\Phi(a_{\alpha i}, a_{\alpha k}, a_{\beta i}, a_{\beta k}) = 0$$

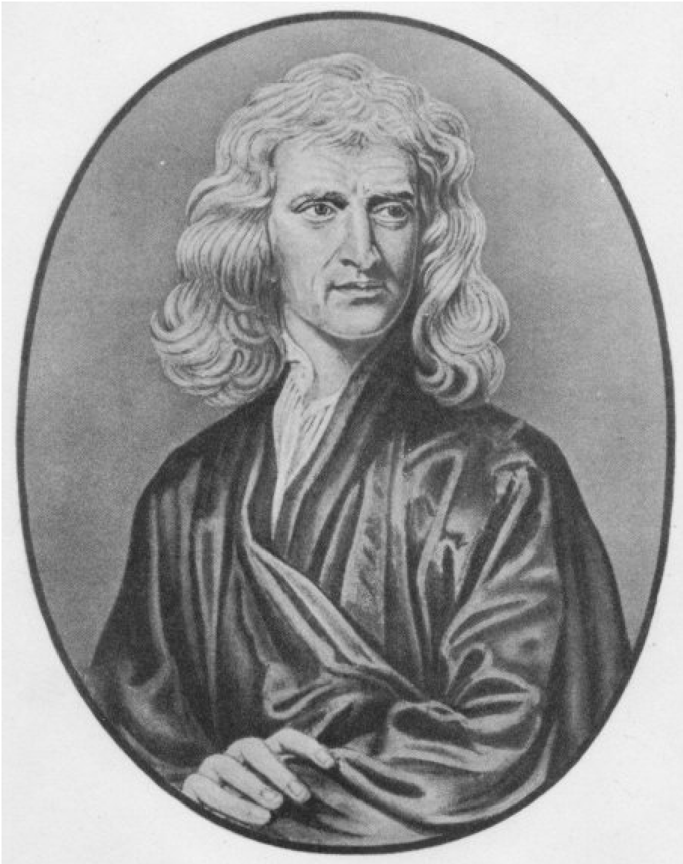
инвариантным относительно выбора двух тел i и k и двух акселераторов α и β .

Я подробно останавливаюсь на Втором законе механики Ньютона, так как уже в этой главе хочу изложить главную идею, которая ляжет в основание отдельного тома "Механика", входящего в многотомник "Фундаментальная физика".

Обратимся теперь к следующему примеру, иллюстрирующему понятие физической структуры ранга (2,3).

Заметки на полях

В глазах современников Ньютон был "новым Моисеем", которому Бог явил свои законы, начертанные на скрижалях, и которому была явлена Истина, лежащая в основе Мироздания. Но при этом "Начала" – книга весьма трудная для понимания даже для современного читателя. Неудивительно, что студенты Кембриджа, встречая Ньютона, говорили: "Вот идёт человек, написавший книгу, в которой ни он сам, ни кто другой ничего не понимает".



Те, кто подобно Ньютону, умеют воспользоваться фактами для создания великого храма науки, те, кому дано разгадать сокровенную суть вещей, составляют, если можно так выразиться, круг личных советников Бога, все прочие трудятся для них.

Готфрид Вильгельм Лейбниц

Диалог о двух главнейших системах мира.

Фронтиспис издания на латинском языке. 1641.

Сейчас, как и 350 лет назад, вновь остро встал вопрос О двух главнейших системах мира.

"В начале было Слово..." (Иоан. 1,1) или по-прежнему

"В мире нет ничего, кроме движущейся материи".

Литература к главе 4

[1] *Эйнштейн А.* Рецензия на книгу Г.А. Лоренца “Статистические теории в термодинамике” /Собрание научных трудов. – Т. IV. – М.: Наука, 1967. – С. 19.

[2] **Творцы мировой науки:** от античности до XX века; Попул. биобиблиографич. энцикл. /Рос. гос. б-ка. – М.: Пашков дом, 2001. – С. 154.

[3] *Кулаков Ю. И.* Математическая формулировка теории физических структур // Сиб. мат. журнал. 1971. т. 12. №5. с. 1142–1144.

[4] *Манин Ю.И.* Математика и физика. – М.: Знание. 1979. С.4.

[5] Физический энциклопедический словарь. - М.: Советская энциклопедия, 1963. Т. III, С. 135; 1965. Т. IV, С. 522; 1962. Т. II, С. 181.

[6] *Герц Генрих.* Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: 1959. С. 16-19.

[7] *Кулаков Ю. И., Сычёва Л. С.* Теория физических структур как программа обоснования физики и как исследовательская программа в математике. // Исследовательские программы в современной науке. Новосибирск. Наука. 1987. с. 99–120.

[8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10 т. Т. Механика. – М.: Наука, 1988, С. 16.

[9] *Кулаков Ю.И.* Элементы теории физических структур. Дополнение Г.Г.Михайличенко. Новосибирск. Изд-во НГУ, 1968. 226 с.

[10] *Пуанкаре Анри.* Идеи Герца в механике //Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: 1959. С. 311, 316.

[11] *Кулаков Ю.И.* О новом виде симметрии, лежащем в основании физических теорий феноменологического типа //Доклады АН СССР, т. 201, 1971, No.3, С. 570-572. (Представлена акад. Беляевым 12 мая 1969)

[12] *Whitehead A.N.*, An enquiry concerning the principles of natural knowledge. Cambridge University Press, New York, 1919. p. 18.

[13] *Макс Джеммер.* Понятие массы в классической и современной физике. - М.: Изд.-во “Прогресс”, 1967. С. 128.

Max Jammer, Concepts of mass in classical and modern physics. Harvard University Press, Cambridge-Massachusetts. 1961.

[14] *Кулаков Ю.И.* О теории физических структур /В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 15 (Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического института АН СССР, т. 127). Сборник работ под ред. О.А.Ладыженской. Ленинград, Наука, 1983, С. 103-151.

[15] *Сена Л.А.* Единицы физических величин и их размерности: Учебно-справочное руководство. — М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. С. 19.

[16] *Чертов А.Г.* Физические величины (терминология, определения, обозначения, размерности, единицы): Справ. пособие. — М.: Высш. школа, 1990, 335 с.

[17] *Данилов Н.И.* Единицы измерений: Справочник для преподавателей физики. — М.: Учпедгиз, 1961, 304 с.

[18] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10 т. Т. II. Теория поля. – М.: Наука. 1988. С. 292 - 293.