Глава 6.

ЭМПИРИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Salus per geometria[37]

Трудно назвать выдающегося геометра, который не отдал бы дани основаниям геометрии. Декарт, Лейбниц, Логранж, Лежандр, Фурье, Гаусс, Коши, Ампер – все эти творцы новой математики – люди, чрезвычайно различные по своим научным, философским, политическим установкам, – все размышляли об основаниях геометрии, старались, по выражению Н. И. Лобачевского, пролить свет на те "темные понятия, с которых, повторяя Евклида, начинаем мы геометрию". Следует заметить при этом, что и объем, и содержание геометрии, а может быть и всей математики, глубоко изменились под влиянием идей, которые принесли с собой размышления над её основаниями, – что эти идеи положили чётко выраженную печать на всё построение теоретического естествознания [1].

— *В.Ф. Каган*

§ 1. Геометрия, физика и Теория физических структур.

§ 2. Возможно ли точное определение исходных понятий?

§ 3. Об одном замечании Эйнштейна.

§ 4. Наглядные соображения.

§ 5. Формула Герона.

§ 6. Квадраты объёма точки, длины отрезка, площади треугольника и объёма тетраэдра.

§ 7. r -точечные диагональные определители Кэли-Менгера и их связь с объёмами.

§ 8. Что же такое трёхмерное евклидово пространство?

[37] Спасение души через геометрию.

§ 9. А если определитель $\mathcal{K}_{ikmst;\, ikmst}(\ell^2)$ не равен нулю?

§ 10. Трёхмерное евклидово пространство с точностью $\delta\ell.$.

§ 11. Наш мир как четырёхмерный слой толщины $\Delta_4.$.

§ 12. Наш мир как трёхмерное пространство постоянной кривизны.

§ 13. Существование "реального" (физического) пространства как опытный факт.

Renatus Cartesius – Рэне Декарт (1596 – 1650)

Французский философ, математик и естествоиспытатель, основатель современного рационализма.

Всё развитие, приведшее к перевороту в понимании геометрии, следует признать за здоровое и сильное движение. Подготавливаемое столетиями, значительно усилившееся в наши дни, оно никоим образом не может считаться уже законченным. Напротив, следует ожидать, что движение это принесёт ещё богатейшие плоды [2].

Эрнст Мах

Глава 6

Эмпирические основания евклидовой геометрии

§ 1. Геометрия, физика и Теория физических структур.

Евклидова геометрия должна считаться физической наукой. С точки зрения физика, существенное значение евклидовой геометрии состоит в том, что её законы не зависят от специфической природы тел, относительные положения которых она изучает.

— Альберт Эйнштейн

Эта глава имеет дело с основами теории, которая может рассматриваться как наиболее древняя часть физики, а именно, с основами евклидовой геометрии.

В течение почти ста лет обсуждается проблема "физического" пространства и особенно после создания неевклидовой геометрии, лежащей в основании общей теории относительности. Несмотря на это, в противоположность впечатлению, производимому некоторыми учебниками по физике, предмет этот ещё далёк от завершения. Проблема определения и интерпретации физических понятий часто игнорировалась частично потому, что методологическая строгость заменялась (и успешно) физической интуицией и частично потому, что проблемы безнадёжно перепутаны и трудны по существу.

В противоположность положению дел в математике, основания физики всё ещё находятся в "предбурбаковском" состоянии. В этой главе, по сути дела впервые, излагается новая точка зрения на евклидову геометрию с позиций Теории феноменологических структур.

Как известно, теория тяготения Эйнштейна отождествляет гравитационное поле с искривлением четырёхмерного пространства событий и таким образом сводит тяготение к геометрии. Возникла идея объединить гравитационное и электромагнитное поля в некоторое единое физическое поле, отождествляя его с новой обобщённой геометрией.

Эйнштейн посвятил этой идее более тридцати лет жизни, но ни один из выдвинутых вариантов единой теории поля не дал реальных результатов, и физики, в конце концов, отказались от мысли свести фундаментальные законы физики к геометрии. Однако, как показывают результаты, полученные в Теории физических структур, сама идея сведéния фундаментальной физики к некоторой обобщённой геометрии не только не является абсурдной, но, напротив, оказывается чрезвычайно глубокой.

Можно строго показать, что все законы фундаментальной физики – те самые, которые мы обычно принимаем в качестве исходных постулатов (второй закон Ньютона в механике, принцип постоянства скорости света в теории относительности, первое и второе начала термодинамики, уравнения Максвелла в электродинамике, принцип суперпозиции и соотношение неопределённости в квантовой механике и т. д.), являются, в конечном итоге, теоремами некоторой обобщённой геометрии, названной мною **сакральной**. В сакральной геометрии мы будем различать левый (нижний) математический объект – $\langle\, \underline{i}\,|$ и правый (верхний) математический объект – $|\,\overline{k}\,\rangle$.

Заметим, что геометрия всегда рассматривалась как некоторая математическая структура, заданная на одном множестве $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$, состоящем из элементов $i, k, \ldots$ произвольной природы, называемых “точками”. В зависимости от той или иной системы исходных аксиом получаются различные пространства: евклидово пространство, пространства постоянной положительной и отрицательной кривизны, пространство аффинной связности, симплектическое пространство и, соответственно, – различные геометрии.

Но как бы ни были различными все традиционные геометрии, все они относятся к одному классу математических структур, заданных на одном множестве $\mathfrak{M}$.

Тщательный анализ самогó понятия физического закона (не конкретного закона Ньютона или конкретных законов термодинамики, а физического закона вообще) привёл меня к созданию специальной метатеории – Теории физических структур – предметом изучения которой являются не конкретные физические явления или физические объекты (такие, как, например, твёрдые тела, конденсированные среды или элементарные частицы), а сами физические законы, рассматриваемые как специальные типы отношений между физическими объектами.

Одним из основных результатов Теории физических структур является установление глубокой связи между фундаментальными физическими законами и особой, принципиально новой, **сакральной геометрией**, наиболее адекватно описывающей физическую реальность. Заметим при этом, что “сакральная геометрия” – это, по сути дела, та же Теория физических структур, но изложенная на специфическом геометрическом языке, в котором широко используются такие понятия, как “точка” и “расстояние”.

Характерной особенностью такой сакральной геометрии является структура, заданная не на одном множестве $\mathfrak{M}$, как это имеет место для любой традиционной геометрии, а на двух множествах $\overline{\mathfrak{M}} = \{i, k, \ldots\}$ и $\underline{\mathfrak{N}} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$, состоящих из элементов различной природы. (Будем для наглядности называть элементы из $\overline{\mathfrak{M}}$ “чёрными точками”, а элементы из $\underline{\mathfrak{N}}$ “белыми точками”. Тогда сакральная геометрия может быть наглядно интерпретирована как геометрия, различающая два типа точек – “белые” и “чёрные”).

Оказывается, что структура, заданная на двух множествах, более проста и, в то же самое время, более содержательна, чем известные до сих пор структуры на одном множестве, то есть традиционные геометрии. При этом сакральная геометрия переходит в обычную геометрию в том частном случае, когда множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ “совпадают”, то есть тогда, когда для каждого $i \in \mathfrak{M}$ существует единственный элемент $\alpha(i) \in \mathfrak{N}$ такой, что “расстояние” $\ell_{i\alpha(i)}$ между ними равно нулю. В этом случае пару $< i,\ \alpha(i) >$ естественно назвать “точкой” в традиционном смысле слова.

Заметим при этом, что основные физические величины, такие как расстояние, время, масса, сила, температура, энтропия, сопротивление, тензор электромагнитного поля и т. п., не вводятся в Теорию физических структур (представляющую собой сакральную геометрию, дополненную физической интерпретацией) извне “руками”, а возникают в ней естественным путём как своеобразные сакральные инварианты.

§ 2. Возможно ли точное определение исходных понятий?

Уже при традиционной формулировке основных законов механики – простейшей физической теории – предполагаются известными такие классические понятия, как трёхмерное евклидово пространство, декартовы координаты, время, скорость и ускорение, масса и сила, инерциальная система отсчёта. Эти понятия привычны с детства и потому наиболее трудны для анализа.

Так, Анри Пуанкаре (1854 – 1912) писал по этому поводу: “Прежде всего мы оказываемся перед трудностями, когда хотим дать определения основным понятиям... Эти затруднения непреодолимы” [3].

Действительно, нельзя дать точные определения исходным понятиям, оставаясь в рамках традиционной теоретической физики. Для этого необходимо подняться на более высокий метатеоретический уровень – на уровень Теории физических структур.

Однако можно достичь значительного прогресса в понимании сущности многих физических величин и понятий (а именно эту цель преследует наш курс фундаментальной физики), достаточно долго оставаясь в рамках традиционного физического мировоззрения. И лишь в самый последний момент нам всё же придётся воспользоваться фундаментальными соотношениями, вытекающими как следствие из чрезвычайно общих и очевидных аксиом, лежащих в основании Теории физических структур.

Итак, начнём с вопросов:

- что такое евклидово пространство? и
- что такое декартовы координаты?

§ 3. Об одном замечании Эйнштейна.

Первыми, кто обратил внимание на то, что "евклидова геометрия …содержит нечто большее, чем простые дедукции, полученные из определений логическим путём", были Мах и Эйнштейн.

Эйнштейн, рассматривая вопрос о связи геометрии с объектами природы, писал: "Физика занимает вопрос, справедливы ли теоремы геометрии.

То, что евклидова геометрия с этой точки зрения содержит нечто большее, чем простые дедукции, полученные из определений логическим путём, видно из следующего простого рассуждения.

Между N точками пространства существуют $\frac{1}{2}N(N-1)$ расстояний ℓ_{ik}; между ℓ_{ik} и $3N$ координатами имеют место соотношения

$$\ell_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 \quad (1)$$

Из этих $\frac{1}{2}N(N-1)$ уравнений можно исключить $3N$ координат, и тогда для ℓ_{ik} останется, по крайней мере, $\frac{1}{2}N(N-1) - 3N$ соотношений[38]. Поскольку ℓ_{ik} — измеряемые величины и, по определению, не зависят друг от друга, эти соотношения между величинами ℓ_{ik} не являются необходимыми a priori" [20].

Ернст Мах (1838 – 1916)

В другом месте Эйнштейн отмечает, что "Мах был единственным, кто серьёзно думал об исключении понятия пространства, которое он пытался заменить представлением о всей сумме расстояний между всеми материальными точками".

Заметим, что факт существования и вид связи между расстояниями на прямой, на плоскости, в трёхмерном и n-мерном евклидовых пространствах, в пространствах постоянной положительной и отрицательной кривизны были известны математикам давно [13], [17], [18], [6]. О существовании упомянутых выше связей между расстояниями иногда говорится и в физической литературе, например, в книге Синга [19], в книге Вейнберга [8] или в книге Мизнера, Торна, Уилера [14].

Например, в книге Вейнберга мы можем прочитать следущее: "Существует простой пример, к которому обращались Эйнштейн, Уилер и др., чтобы проиллюстрировать, как исследование метрики поверхности позволяет изучить её внутренние свойства.

[38]Фактически, из-за специального вида уравнений (1) из приведённой системы можно исключить не $3N$, а только $3N-6$ и тогда для l_{ik} останется не $\frac{1}{2}N(N-1)-3N$ соотношений, а $\frac{1}{2}N(N-1)-3N+6$. Однако ясно, что подобное уточнение не меняет существа дела. (– Ю.К.)

Рассмотрим N точек на плоскости (См. рис. 1). Одну из них примем за начало координат. Ось X проведём из начала координат через другую заданную точку, тогда расстояния между различными точками будут задаваться с помощью $2N-3$ координат, а именно с помощью x_2 – координаты второй точки и x – и y – координат остальных $N-2$ точек. Существует $\frac{1}{2}N(N-1)$ различных расстояний между N точками, и для достаточно больших N их можно связать M различными алгебраическими соотношениями, где $M=\frac{1}{2}N(N-1)-(2N-3)=$ $=\frac{1}{2}(N-2)(N-3)$. В простейшем нетривиальном случае $N=4$ можно легко показать (!?), что расстояния ℓ_{ik} между i-той и k-той точками связаны соотношением:

$$\begin{gathered}
\ell_{12}^4\ell_{34}^2+\ell_{13}^4\ell_{24}^2+\ell_{14}^4\ell_{23}^2+\ell_{23}^4\ell_{14}^2+\ell_{24}^4\ell_{13}^2+\ell_{34}^4\ell_{12}^2+\\
+\ell_{12}^2\ell_{23}^2\ell_{31}^2+\ell_{12}^2\ell_{24}^2\ell_{41}^2+\ell_{13}^2\ell_{34}^2\ell_{41}^2+\ell_{23}^2\ell_{34}^2\ell_{42}^2-\\
-\ell_{12}^2\ell_{23}^2\ell_{34}^2-\ell_{13}^2\ell_{32}^2\ell_{24}^2-\ell_{12}^2\ell_{24}^2\ell_{43}^2-\ell_{14}^2\ell_{42}^2\ell_{23}^2-\\
-\ell_{13}^2\ell_{34}^2\ell_{42}^2-\ell_{14}^2\ell_{43}^2\ell_{32}^2-\ell_{23}^2\ell_{31}^2\ell_{14}^2-\ell_{21}^2\ell_{13}^2\ell_{34}^2-\\
-\ell_{24}^2\ell_{41}^2\ell_{13}^2-\ell_{21}^2\ell_{14}^2\ell_{43}^2-\ell_{31}^2\ell_{12}^2\ell_{24}^2-\ell_{32}^2\ell_{21}^2\ell_{14}^2=0
\end{gathered}$$

Это соотношение удовлетворяется на любом односвязном участке поверхности или конуса, так как эти фигуры обладают теми же внутренними свойствами, что и плоскость”[8].

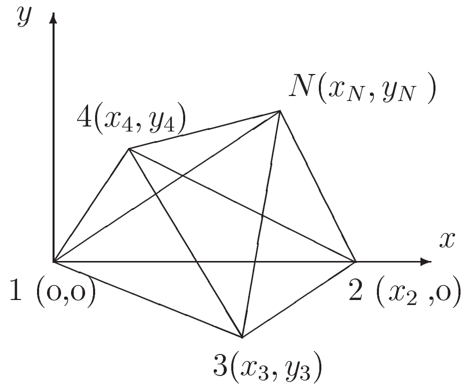


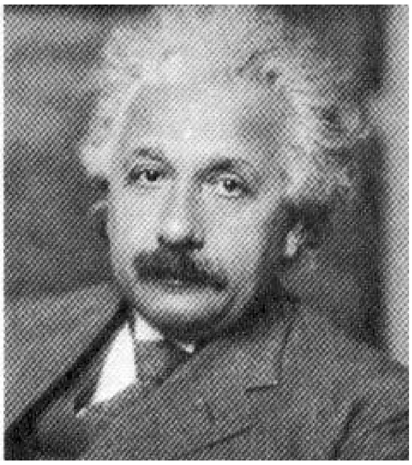
Рис.1. Выбор системы координат на плоскости по Вейнбергу [8].

Однако после Маха, пожалуй, только один Эйнштейн увидел в факте существования связи между расстояниями нетривиальную физическую проблему. Действительно, Вейнберг говорит об этой связи лишь как об иллюстрации существования внутренней геометрии любой поверхности, открытой ещё Гауссом, а Синг, приводя в своей “Общей теории относительности” [19] конкретный вид уравнения, связывающего *десять* взаимных расстояний между *пятью* произвольными точками трёхмерного евклидова пространства i, k, m, n, p

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} & \ell^2_{in} & \ell^2_{ip} \\ 1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} & \ell^2_{kn} & \ell^2_{kp} \\ 1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 & \ell^2_{mn} & \ell^2_{mp} \\ 1 & \ell^2_{in} & \ell^2_{kn} & \ell^2_{mn} & 0 & \ell^2_{np} \\ 1 & \ell^2_{ip} & \ell^2_{kp} & \ell^2_{mp} & \ell^2_{np} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

рассматривает его лишь как вспомогательное средство для экспериментального определения кривизны мировой линии наблюдателя при наличии гравитационного поля.

И только Эйнштейн взглянул на всю эту элементарную алгебру глазами физика–философа и, по-видимому, интуитивно почувствовал, что "евклидова геометрия с этой точки зрения содержит нечто большее, чем простые дедукции, полученные из определений логическим путём". Мысль, заключённая в словах Эйнштейна о том, что факт существования соотношения между измеряемыми на опыте расстояниями имеет нетривиальное происхождение и отражает наиболее глубокие физические свойства системы материальных точек, является, на мой взгляд, чрезвычайно плодотворной.



Альберт Эйнштейн
(1879 – 1955)

Поэтому всё дальнейшее изложение Теории физических структур мы будем осуществлять лишь как последовательное развитие этой, по существу своему простой, идеи.

§ 4. Наглядные соображения.

Философия природы написана в величайшей книге, которая всегда открыта перед нашими глазами, – я разумею Вселенную, но понять её сможет лишь тот, кто сначала выучит язык и постигнет письмена, которыми она начертана. А написана эта книга на языке математики, и письмена её – треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без которых нельзя понять по-человечески её слова: без них – тщетное кружение в темном лабиринте.

— *Галилео Галилей*

Сегодня нас может удивить, что Галилей считал "буквами" того языка, на котором записаны все законы природы, "треугольники, окружности и другие геометрические фигуры". Но ведь единственной математикой, доступной Галилею, была геометрия древних греков, а до открытия дифференциального и интегрального исчисления (в значительной степени стимулированных трудами Галилея) и возникновения концепции дифференциального уравнения оставалось больше полувека [10].

Эта книга предназначена для читателя, подготовленного вековыми традициями – физикой и математикой, которым он обучался в школе и в университете, и потому привыкшего мыслить образами, оперировать наглядными представлениями, опираясь на традиционное физическое мировоззрение. Не будем отучать его от этого, не говоря уже – вооружать его против этого. Необходимо переходить к новому физическому мировоззрению по возможности постепенно и плавно.

Итак, рассмотрим конечное множество

$$\mathfrak{M} = \{i_1, i_2, \ldots, i_N\},$$

состоящее из N произвольно расположенных в трёхмерном пространстве точек. Можно ли утверждать, что несмотря на совершенно произвольное их расположение существует вполне определённый физический закон (то есть закон, справедливость которого может быть установлена экспериментальным путём), которому подчиняются все точки множества $\mathfrak{M}$?

Оказывается, что такой закон действительно существует. Чтобы обнаружить его, необходимо рассмотреть все возможные пары точек из $\mathfrak{M}$ (их будет $\frac{1}{2}N(N-1)$) и сопоставить каждой паре экспериментально измеряемую величину, характеризующую взаимное расположение точек. В качестве такой измеряемой на опыте величины примем в простейшем случае расстояние, измеренное, например, с помощью обычной масштабной линейки.

Сопоставляя каждой паре точек (i, k) расстояние ℓ_{ik}, мы получим набор опытных данных, полностью характеризующих данное множество $\mathfrak{M}$, который может быть представлен в виде следующей симметрической матрицы:

	i_1	i_2	i_3	$\ldots$	i_N
i_1	0	ℓ_{12}	ℓ_{13}	$\ldots$	ℓ_{1N}
i_2	ℓ_{12}	0	ℓ_{23}	$\ldots$	ℓ_{2N}
i_3	ℓ_{13}	ℓ_{23}	0	$\ldots$	ℓ_{3N}
$\ldots$	$\ldots\ldots$				
i_N	ℓ_{1N}	ℓ_{2N}	ℓ_{3N}	$\ldots$	0

где

$$\ell_{ik} = \ell_{p_i p_k}$$

Ясно, что взаимные расстояния $\begin{matrix} \ell_{ik} & \ell_{im} \\ & \ell_{km} \end{matrix}$ между *тремя* произвольными точками $i, k, m \in \mathfrak{M}$ не могут быть связаны между собой функциональной зависимостью, так как при фиксированных расстояниях ℓ_{ik} и ℓ_{im} третье расстояние ℓ_{km} может принимать различные значения от $|\ell_{ik} - \ell_{im}|$ до $\ell_{ik} + \ell_{im}$
то есть $|\ell_{ik} - \ell_{im}| \leqslant \ell_{km} \leqslant \ell_{ik} + \ell_{im}$. (см. рис. 2).

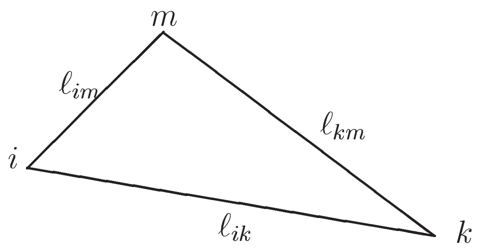


Рис. 2. Тройка точек $\{i,k,m\} \subset \mathfrak{M}$. При фиксированных значениях ℓ_{ik} и ℓ_{im} значение ℓ_{km} не определено.

Точно так же обстоит дело, если взять *четыре* произвольные точки $i,k,m,n \in \mathfrak{M}$ (см. рис. 3) и рассмотреть зависимость между *шестью* взаимными расстояниями

$$\begin{array}{ccc} \ell_{ik} & \ell_{im} & \ell_{in} \\ & \ell_{km} & \ell_{kn} \\ & & \ell_{mn} \end{array}$$

При фиксированных пяти расстояниях ℓ_{ik} ℓ_{im} ℓ_{in} ℓ_{km} ℓ_{kn} шестое расстояние ℓ_{mn} может принимать различные значения из некоторого интервала (см. рис. 3):

$$\Psi_-(\ell_{ik},\ell_{im},\ell_{in},\ell_{km},\ell_{kn}) \leqslant \ell_{mn} \leqslant \Psi_+(\ell_{ik},\ell_{im},\ell_{in},\ell_{km},\ell_{kn}).$$

Но если взять *пять* произвольных точек $i,\ k,\ m,\ n,\ p \in \mathfrak{M}$ (см. рис. 4), то одно из *десяти* взаимных расстояний

$$\begin{array}{cccc} \ell_{ik} & \ell_{im} & \ell_{in} & \ell_{ip} \\ & \ell_{km} & \ell_{kn} & \ell_{kp} \\ & & \ell_{mn} & \ell_{mp} \\ & & & \ell_{np} \end{array}$$

является двузначной функцией остальных девяти.

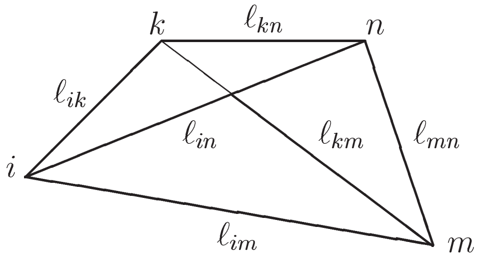


Рис. 3. Четвёрка точек $\{i,k,m,n\} \subset \mathfrak{M}$. При фиксированных расстояниях $\ell_{ik},\ell_{im},\ell_{in}$, ℓ_{km},ℓ_{kn} расстояние ℓ_{mn} не определено.

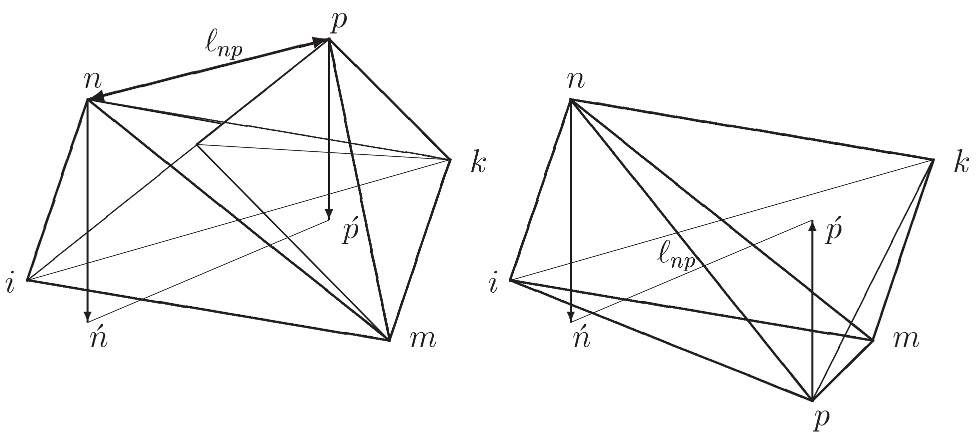


Рис. 4. Пятёрка точек $\{i,\ k,\ m,\ n,\ p\} \subset \mathfrak{M}$. Девять расстояний $\ell_{ik},\ \ell_{im},\ \ell_{in},\ \ell_{ip}, \ell_{km},\ \ell_{kn},\ \ell_{kp},\ \ell_{mn},\ \ell_{mp}$ определяют собой два воможных значения расстояния ℓ_{np} .

Итак, для любых пяти точек трёхмерного евклидова пространства существует функциональная связь между их взаимными расстояния-

ми, вид которой не зависит от выбора этих точек.

Чтобы получить наиболее естественным путём конкретное выражение для этой функции, имеющей для понимания дальнейшего чрезвычайно важное значение, в следующем параграфе мы подробно рассмотрим понятие *объёма*, представляющее собой одно из фундаментальных понятий Теории физических структур.

§ 5. Формула Герона.

Не иди по следам древних, но ищи то, что искали они.
— Кобо-дайси (774 - 835) (Великий учитель Южной горы, буддийский проповедник, поэт, писатель и учёный.)
—

Это может показаться удивительным и странным, но именно формула Герона, содержащаяся в “Метрике” Герона Александрийского (65 – 150 гг. н.э.) и известная ещё Архимеду (III в. до н.э.), может стать той щелью, через которую можно заглянуть в мир физических структур.

Итак, чтобы реконструировать ход мысли античных математиков, напомним вывод хорошо известной ещё из средней школы формулы Герона, выражающей площадь треугольника S_{ikm} через длины его сторон ℓ_{ik} , ℓ_{im} , ℓ_{km} .

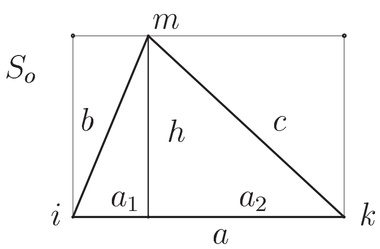


Рис. 5. К выводу формулы Герона.

Исходим из представления, что площадь прямоугольника S_o равна произведению его сторон h и a . Отсюда площадь треугольника

$$S = \tfrac{1}{2}S_o = \tfrac{1}{2}ha.$$

Высота h и три стороны a, b, c связаны между собой посредством двух вспомогательных сторон a_1 и a_2 следующими тремя соотношениями;

$$h^2 = b^2 - {a_1}^2,$$
$$h^2 = c^2 - {a_2}^2,$$
$$a = a_1 + a_2.$$

Исключая вспомогательные величины a_1 и a_2 , получаем следующее выражение для h^2 :

$$h^2 = \tfrac{1}{4c^2}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4).$$

Таким образом, выражение для квадрата площади треугольника приобретает вид:

$$S^2 = \tfrac{1}{16}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4).$$

Замечая, что

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 =$$
$$= (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c), \tag{2}$$

получаем
$$S^2 = \tfrac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

или

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c), \tag{3}$$

где
$$p = \tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

Но выражение $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$ помимо представления (2) допускает ещё одно, ещё более красивое, представление в виде определителя четвёртого порядка (!):

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a^2 & b^2 \\ -1 & a^2 & 0 & c^2 \\ -1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, выражение для квадрата площади треугольника приобретает следующий вид:

$$S^2 = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a^2 & b^2 \\ -1 & a^2 & 0 & c^2 \\ -1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Предвидя дальнейшее обобщение формулы (4) на случай объёма тетраэдра, представим множитель $1/16$ в виде

$$\tfrac{1}{16} = \tfrac{(-1)^2}{2^2\ (2!)^2},$$

введём следующие обозначения:

$$S = S_{ikm}$$

$$a = \ell_{ik}\ ; \quad b = \ell_{im}\ ; \quad c = \ell_{km}$$

и перепишем формулу (4) в окончательном виде:

$$\boxed{S_{ikm}^2 = \tfrac{(-1)^2}{2^2\ (2!)^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 \end{vmatrix}} \tag{5}$$

Сравнивая оба выражения (3) и (5), заметим, что очень трудно, а практически невозможно, обобщить формулу (3) на случай квадрата объёма тетраэдра, в то время как из формулы (5) это обобщение следует естественным образом.

§ 6. Квадраты объёма точки, длины отрезка, площади треугольника и объёма тетраэдра.

Хотя идеи, на которых основан метод аналитической геометрии, детски просты, тем не менее этод метод настолько мощен, что, применяя его, рядовые семнадцатилетние мальчики могут решать задачи, которые поставили бы в тупик величайших из греческих геометров – Евклида, Архимеда и Аполлония [7].

— *Э.Т. Белл (1883 – 1960)*

Имея формулу (5) для квадрата площади треугольника, легко обобщить её на случай симплекса любой размерности.

Таким образом, имеем следующие выражения:

$\boldsymbol{n=0}$ для квадрата объёма точки v_i

$$v_i^2 = \frac{(-1)^o}{2^o\ (0!)^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \tag{6}$$

$\boldsymbol{n=1}$ для квадрата длины отрезка ℓ_{ik}

$$\ell_{ik}^2 = \frac{(-1)^1}{2^1\ (1!)^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 \end{vmatrix}; \tag{7}$$

$\boldsymbol{n=2}$ для квадрата площади треугольника S_{ikm}
(формула Герона Александрийского (65 – 150 гг.н.э.))

$$S_{ikm}^2 = \frac{(-1)^2}{2^2\ (2!)^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 \end{vmatrix}; \tag{8}$$

$\boldsymbol{n=3}$ для квадрата объёма тетраэдра V_{ikmp}
(формула Никколо Тартальи (1500 – 1557 гг.))

$$V_{ikmp}^2 = \frac{(-1)^3}{2^3\ (3!)^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{ip}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kp}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mp}^2 \\ -1 & \ell_{ip}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{mp}^2 & 0 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Обращает на себя внимание несколько неожиданное утверждение, что объём точки v_i равен 1. Прежде всего возникает вопрос – в каких единицах? Мы хорошо знаем, что длина измеряется, например, в метрах (m^1), площадь – в метрах квадратных (m^2), объём – в метрах кубических (m^3). Следовательно, объём нульмерного объекта – точки – должен измеряться в m^o , то есть быть безразмерным, или, другими словами, должен измеряться в "естественных" единицах, не зависящих от выбора эталона длины.

Из-за множителя $(-1)^n$ выражения, стоящие в правых частях формул (5), (6)–(9) всегда являются положительно определёнными.

Коэффициенты

$$\frac{1}{2^n\ (n!)^2}$$

выбраны так, чтобы объём элементарного куба, с ребром, равным единице длины, был бы равен единице.

§ 7. r -точечные диагональные определители Кэли-Менгера и их связь с объёмами.

Итак, формула Герона, записанная в виде (3), (4) и (5), породила целое семейство определителей, представляющих собой функции $\frac{1}{2}r(r-1)$ квадратов расстояний между произвольными r точками:

$$\begin{array}{cccc} \ell^2_{i_1 i_2} & \ell^2_{i_1 i_3} & \dots & \ell^2_{i_1 i_r} \\ & \ell^2_{i_2 i_3} & \dots & \ell^2_{i_2 i_r} \\ & & \dots & \dots \\ & & & \ell^2_{i_{r-1} i_r}. \end{array}$$

Эти определители, называемые **r -точечными диагональными определителями Кэли-Менгера** [6], [11], имеют следующий вид:

одноточечный диагональный определитель Кэли-Менгера

$$\mathcal{K}_{i;i}(\ell^2) = (-1)^o \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1;$$

двухточечный диагональный определитель Кэли-Менгера

$$\mathcal{K}_{ik;ik}(\ell^2) = (-1)^1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 \end{vmatrix};$$

трёхточечный диагональный определитель Кэли-Менгера

$$\mathcal{K}_{ikm;ikm}(\ell^2) = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 \end{vmatrix};$$

четырёхточечный диагональный определитель Кэли-Менгера

$$\mathcal{K}_{ikmp;ikmp}(\ell^2) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} & \ell^2_{ip} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} & \ell^2_{kp} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 & \ell^2_{mp} \\ -1 & \ell^2_{ip} & \ell^2_{kp} & \ell^2_{mp} & 0 \end{vmatrix};$$

. . . .

r -точечный диагональный определитель Кэли-Менгера

$$\mathcal{K}_{i_1\ldots i_r;i_1\ldots i_r}(\ell^2) = (-1)^{r-1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{i_1 i_2} & \ldots & \ell^2_{i_1 i_r} \\ -1 & \ell^2_{i_1 i_2} & 0 & \ldots & \ell^2_{i_2 i_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \ell^2_{i_1 i_r} & \ell^2_{i_2 i_r} & \ldots & 0 \end{vmatrix},$$

Нижние индексы $i_1\ldots i_r; i_1\ldots i_r$ у символа $\mathcal{K}_{i_1\ldots i_r;i_1\ldots i_r}(\ell^2)$ дублируются [4], чтобы подчеркнуть, что r -точечные диагональные определители Кэли-Менгера являются частным случаем более общих $2\cdot r$ -точечных недиагональных определителей Кэли-Менгера $\mathcal{K}_{i_1\ldots i_r;k_1\ldots k_r}(\ell^2)$.

r -точечные диагональные определители Кэли-Менгера являются фундаментальными инвариантами, то есть функциями исходных инвариантов – квадратов расстояний $\ell^2_{ik;n} = (x_1(i)-x_1(k))^2+\ldots+(x_n(i)-x_n(k))^2$ и имеют простой геометрический смысл: каждый такой определитель с точностью до множителя равен квадрату объёма соответствующего симплекса[39]:

$$\mathcal{K}_{i;i}(\overset{0}{\ell}{}^2) = 2^0\ (0!)^2\ (v_i)^2;$$

$$\mathcal{K}_{ik;ik}(\overset{1}{\ell}{}^2) = 2^1\ (1!)^2\ (\ell_{ik})^2;$$

$$\mathcal{K}_{ikm;ikm}(\overset{2}{\ell}{}^2) = 2^2\ (2!)^2\ (S_{ikm})^2;$$

$$\mathcal{K}_{ikmp;ikmp}(\overset{3}{\ell}{}^2) = 2^3\ (3!)^2\ (V_{ikmp})^2;$$

. . . .

$$\mathcal{K}_{i_1\ldots i_r;i_1\ldots i_r}(\overset{r-1}{\ell}{}^2) = 2^{r-1}\ ((r-1)!)^2\ (V_{i_1\ldots i_r})^2.$$

Известный английский математик Артур Кэли (1821 – 1895) первый показал, что квадраты взаимных расстояний между пятью точками трёхмерного евклидова пространства обращают в ноль определитель

$$\mathcal{K}_{ikmpq;ikmpq}(\ell^2_3) = (-1)^4\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik;3} & \ell^2_{im;3} & \ell^2_{ip;3} & \ell^2_{iq;3} \\ -1 & \ell^2_{ik;3} & 0 & \ell^2_{km;3} & \ell^2_{kp;3} & \ell^2_{kq;3} \\ -1 & \ell^2_{im;3} & \ell^2_{km;3} & 0 & \ell^2_{mp;3} & \ell^2_{mq;3} \\ -1 & \ell^2_{ip;3} & \ell^2_{kp;3} & ell^2_{mp;3} & 0 & \ell^2_{pq;3} \\ -1 & \ell^2_{iq;3} & \ell^2_{kq;3} & \ell^2_{mq;3} & \ell^2_{pq;3} & 0 \end{vmatrix},$$

где

$$\ell^2_{ik;3} = (x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2+(z_i-z_k)^2.$$

[39]Итак, мы видим, что определители Кэли-Менгера позволяют выразить квадраты объёмов $n+2$ -точечных симплексов через квадраты расстояний между точками и уже поэтому играют важную роль в n -мерной евклидовой геометрии. Однако по непонятной причине о них нет даже упоминаний в пятитомной “Математической энциклопедии” (1977 – 1984) [12]

Коэффициент $(-1)^{r-1}$ вводится в выражение для r-точечного определителя Кэли-Менгера $\mathcal{K}_{i_1\ldots i_r;i_1\ldots i_r}(\ell^2)$ для того, чтобы сделать этот определитель положительно определённым при любых r.

С другой стороны, Карл Менгер (р. 1902), заложивший в 1928 году основы абстрактной **геометрии расстояний**, широко использовал определитель $\mathcal{K}_{i_1\ldots i_{n+2};i_1\ldots i_{n+2}}(\ell^2)$ для формулировки достаточных условий конгруэнтного вложения полуметрического набора $n+2$ точек в n-мерное евклидово пространство [6].

В связи с этим определители $\mathcal{K}_{i_1\ldots i_r;i_1\ldots i_r}(\ell^2)$ с полным правом могут быть названы **r-точечными определителями Кэли-Менгера.**

§ 8. Что же такое трёхмерное евклидово пространство?

Картезианское видение мира глубоко проникло в человеческий ум за три века, прошедшие после него, и нужно время, чтобы оно было вытеснено иным отношением к проблемам реальности.

— Вернер Гейзенберг

Начнём с понятия евклидовой прямой.

Определение 1.

Мы будем говорить, что точки $i,\ k,\ m,\ p,\ \ldots \in \mathfrak{M}_1$ лежат на евклидовой прямой $\mathfrak{M}_1$, если для любых **трёх** *точек $i,\ k,\ m$* **три** *квадрата расстояний*

$$\begin{matrix} \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 \\ & \ell_{km}^2 \end{matrix}$$

обращают в ноль 3-точечный диагональный определитель Кэли-Менгера, то есть

$$\forall\ i,\ k,\ m\ \in \mathfrak{M}_1$$

$$\mathcal{K}_{ikm;ikm}(\ell^2) = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

При этом запишем два неравенства, первое из которых тривиально и приведено здесь лишь из-за соображений полноты:

$$\mathcal{K}_{i;i} = 1$$

$$\mathcal{K}_{ik;ik} \geqslant 0$$

Аналогичным образом определим понятие евклидовой плоскости:

Определение 2.

Мы будем говорить, что точки $i,\ k,\ m,\ p,\ q\ldots \in \mathfrak{M}_2$ лежат на евклидовой плоскости $\mathfrak{M}_2$, если для любых **четырёх** *точек $i,\ k,\ m,\ p$* **шесть** *квадратов* *расстояний*

$$\begin{array}{ccc} \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{ip}^2 \\ & \ell_{km}^2 & \ell_{kp}^2 \\ & & \ell_{mp}^2 \end{array}$$

обращают в ноль 4-точечный определитель Кэли-Менгера, то есть

$$\forall\ i,\ k,\ m,\ p\ \in \mathfrak{M}_2$$

$$\mathcal{K}_{ikmp;ikmp}(\ell^2) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{ip}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kp}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mp}^2 \\ -1 & \ell_{ip}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{mp}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

При этом должны выполняться три дополнительных условия:

$$\mathcal{K}_{i;i} = 1$$

$$\mathcal{K}_{ik;ik}\ \geqslant 0$$

$$\mathcal{K}_{ikm;ikm}\ \geqslant 0$$

Наконец, дадим определение трёхмерного евклидова пространства:

Определение 3.

Мы будем говорить, что на множестве точек $\mathfrak{M}_3 = \{i,\ k,\ m,\ p,\ \ldots\}$ имеет место структура трёхмерного евклидова пространства, если для любых пяти точек десять квадратов расстояний

$$\begin{array}{cccc} \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{ip}^2 & \ell_{iq}^2 \\ & \ell_{km}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{kq}^2 \\ & & \ell_{mp}^2 & \ell_{mq}^2 \\ & & & \ell_{pq}^2 \end{array}$$

обращают в ноль 5-точечный определитель Кэли-Менгера, то есть

$$\forall\ i,\ k,\ m,\ p,\ q\ \in \mathfrak{M}_3$$

$$\mathcal{K}_{ikmpq;ikmpq}(\ell^2) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{ip}^2 & \ell_{iq}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{kq}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mp}^2 & \ell_{mq}^2 \\ -1 & \ell_{ip}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{mp}^2 & 0 & \ell_{pq}^2 \\ -1 & \ell_{iq}^2 & \ell_{kq}^2 & \ell_{mq}^2 & \ell_{pq}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

При этом должны выполняться четыре дополнительных условия:

$$\mathcal{K}_{i;i} = 1,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{ik;ik} &\geqslant 0,\\ \mathcal{K}_{ikm;ikm} &\geqslant 0,\\ \mathcal{K}_{ikmp;ikmp} &\geqslant 0.\end{aligned}$$

Приведённое выше определение трёхмерного евклидова пространства удобно, прежде всего, для физики, так как, в отличие от всех других известных определений [9], [1], [16], [5], позволяет **экспериментальным путём** установить факт существования евклидова пространства и определить его размерность, равную трём.

Другими словами, для произвольно выбранных точек трёхмерного евклидова пространства имеют место следующие соотношения между квадратами взаимных расстояний:

- положительная определённость квадрата расстояния[40]:

$$\forall i,k \in \mathfrak{M} \qquad (-1)^1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 \end{vmatrix} \geqslant 0 \tag{10}$$

- неравенство треугольника:

$$\forall i,k,m \in \mathfrak{M} \qquad (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 \end{vmatrix} \geqslant 0 \tag{11}$$

- неравенство тетраэдра:

$$\forall i,k,m,n \in \mathfrak{M} \qquad (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} & \ell^2_{in} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} & \ell^2_{kn} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 & \ell^2_{mn} \\ -1 & \ell^2_{in} & \ell^2_{kn} & \ell^2_{mn} & 0 \end{vmatrix} \geqslant 0 \tag{12}$$

и, наконец, самое главное

- *фундаментальный физический закон, лежащий в основании трёхмерной евклидовой геометрии,* допускающий непосредственную проверку на опыте:

$$\forall i,k,m,n,p \in \mathfrak{M} \qquad (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} & \ell^2_{in} & \ell^2_{ip} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} & \ell^2_{kn} & \ell^2_{kp} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 & \ell^2_{mn} & \ell^2_{mp} \\ -1 & \ell^2_{in} & \ell^2_{kn} & \ell^2_{mn} & 0 & \ell^2_{np} \\ -1 & \ell^2_{ip} & \ell^2_{kp} & \ell^2_{mp} & \ell^2_{np} & 0 \end{vmatrix} \equiv 0. \tag{13}$$

[40] не имеющая места, например, в псевдоевклидовом пространстве событий с метрикой $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

Итак, равенство нулю пятиточечного определителя Кэли-Менгера (13), дополненное неравенствами (10) – (12), представляет собой универсальный, общезначимый факт существования трёхмерного евклидова пространства, и потому может рассматриваться как один из наиболее глубоких и фундаментальных законов природы, допускающих непосредственную экспериментальную проверку.

Так что, если человек когда-нибудь достигнет далёких звёздных систем, то первый эксперимент, который там необходимо осуществить, должен ответить на вопрос – применима ли там для описания отношений между неподвижными телами трёхмерная евклидова геометрия?

Идея такого эксперимента чрезвычайно проста: необходимо взять достаточно большое число $N > 5$ неподвижных относительно друг друга тел, как можно точнее измерить расстояние между ними и, используя полученные из эксперимента данные, найти значения $C_N^5 = \frac{N!}{5!(N-5)!} = \frac{1}{5!}(N-4)(N-3)(N-2)(N-1)N$ определителей Кэли-Менгера

$$\mathcal{K}_{ikmpq;ikmpq}(\ell^2) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{ip}^2 & \ell_{iq}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{kq}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mp}^2 & \ell_{mq}^2 \\ -1 & \ell_{ip}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{mp}^2 & 0 & \ell_{pq}^2 \\ -1 & \ell_{iq}^2 & \ell_{kq}^2 & \ell_{mq}^2 & \ell_{pq}^2 & 0 \end{vmatrix},$$

где $\{i,k,m,p,q\} \subset \{i_1, i_2, \ldots, i_N\}$.

Если все эти определители обращаются в ноль, то мы можем утверждать, что и в далёкой звёздной системе отношения между неподвижными телами описываются трёхмерной евклидовой геометрией, как и у нас на Земле.

§ 9. А если определитель $\mathcal{K}_{ikmst;\ ikmst}(\ell^2)$ не равен нулю?

Отклонение от нуля определителя $\mathcal{K}_{ikmst;\ ikmst}(\ell^2) \equiv \mathcal{K}_5 \equiv \varepsilon$ в принципе может быть обусловлено разными причинами.

Прежде всего такой причиной может быть

• систематическая погрешность измерения расстояния между двумя точками;

далее может оказаться, что

• наш мир, образно говоря, представляет собой очень тонкий плоский слой, расположенный в четырёхмерном евклидовом пространстве между двумя близкими трёхмерными гиперплоскостями;

может оказаться, что

• наш мир представляет собой трёхмерное пространство очень малой постоянной положительной или отрицательной кривизны;

и не исключена ещё одна альтернатива,что

• наш мир обладает структурой трёхмерного евклидова пространства лишь на достаточно больших расстояниях; на расстояниях же сравнимых или меньших некоторого предельного значения δ , отличного от нуля, в принципе отсутствует какая-либо структура.

Рассмотрим каждый из этих случаев более подробно.

§ 10. Трёхмерное евклидово пространство с точностью $\delta\ell$.

Допустим, что *отклонение определителя* $\mathcal{K}_5$ *от нуля обусловлено обычной систематической погрешностью измерения расстояния.*

Поскольку любое измерение, и в том числе измерение расстояния, осуществляется с некоторой погрешностью $\delta\ell$, то, естественно, значение определителя Кэли-Менгера[41] $\mathcal{K}_5 \equiv \varepsilon^{(4\cdot2)}$ при наличии структуры трёхмерного евклидова пространства должно лежать в интервале $-\delta\mathcal{K}_5 < \varepsilon^{(4\cdot2)} < \delta\mathcal{K}_5$.

Так как явная зависимость определителя $\mathcal{K}_5$ от измеряемых на опыте расстояний ℓ^2_{ik} известна

$$\varepsilon^{(4\cdot2)} = \mathcal{K}_5 = \mathcal{K}_{ikmst;ikmst} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} & \ell^2_{is} & \ell^2_{it} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} & \ell^2_{ks} & \ell^2_{kt} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 & \ell^2_{ms} & \ell^2_{mt} \\ -1 & \ell^2_{is} & \ell^2_{ks} & \ell^2_{ms} & 0 & \ell^2_{st} \\ -1 & \ell^2_{it} & \ell^2_{kt} & \ell^2_{mt} & \ell^2_{st} & 0 \end{vmatrix} \qquad (14)$$

то возможное малое отклонение определителя Кэли-Менгера $\delta\mathcal{K}_5$ от нуля можно легко подсчитать, зная погрешность $\delta\ell$ при измерении расстояния ℓ :

$$\delta\mathcal{K}_5 = A(\ell^2)\ell\delta\ell.$$

Если подсчитанные по формуле (14) значения определителя $\varepsilon^{(4\cdot2)}$ при любом выборе тел $i,\ k,\ m,\ s,\ t \in \mathfrak{M}$ лежат в достаточно узком интервале

$$-\delta\mathcal{K}_5 < \varepsilon^{(4\cdot2)} < \delta\mathcal{K}_5,$$

то мы будем говорить, что на множестве реальных тел $\mathfrak{M}$ имеет место структура трёхмерного евклидова пространства с точностью $\delta\ell$.

Если же $|\varepsilon^{(4\cdot2)}| > \delta\mathcal{K}_5$,

то отклонение от нуля определителя $\varepsilon^{(4\cdot2)} = \mathcal{K}_5$ может быть обусловлено другими причинами.

[41]Обозначение $\mathcal{K}_5 \equiv \varepsilon^{(4\cdot2)}$ должно напоминать читателю, что определитель $\mathcal{K}_5$ имеет размерность квадрата четырёхмерного объёма, то есть $(\text{см}^4)^2$.

§ 11. Наш мир как четырёхмерный слой толщины $\boldsymbol{\Delta_4}$.

Допустим, что *отклонение определителя $\mathcal{K}_5$ от нуля обусловлено тем, что наш мир представляет собой очень тонкий плоский слой, расположенный в четырёхмерном евклидовом пространстве между двумя близкими трёхмерными гиперплоскостями.*

Прежде всего введём понятие *высоты* $(n+1)$-*точечного симплекса* $\{i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}\}$, то есть длины перпендикуляра h_{n+1} в n-мерном евклидовом пространстве, опущенного из точки i_{n+1} на n-точечный симплекс $\{i_1, \ldots, i_n\}$.

Измеряемые на опыте n-мерный объём $V^{(n)}_{i_1 \ldots i_n i_{n+1}}$ $(n+1)$-точечного симплекса $\{i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}\}$ и $(n-1)$-мерный объём $V^{(n-1)}_{i_1 \ldots i_n}$ n-точечного симплекса $\{i_1, \ldots, i_n\}$ связаны с высотой h_{n+1} следующим образом:

$$V^{(n)}_{i_1 \ldots i_n i_{n+1}} = \tfrac{1}{n}\, V^{(n-1)}_{i_1 \ldots i_n}\, h_{n+1},$$

то есть

$$\begin{array}{lcl}
V^{(1)}_{ik} = \tfrac{1}{1}\, V^{(o)}_{i} h_k & \text{или} & \ell_{ik} = \tfrac{1}{1}\, v_i h_k \\[2ex]
V^{(2)}_{ikm} = \tfrac{1}{2}\, V^{(1)}_{ik} h_m & \text{или} & S_{ikm} = \tfrac{1}{2}\, \ell_{ik} h_m \\[2ex]
V^{(3)}_{ikms} = \tfrac{1}{3}\, V^{(2)}_{ikm} h_s & \text{или} & V_{ikms} = \tfrac{1}{3}\, S_{ikm} h_s \\[2ex]
V^{(4)}_{ikmst} = \tfrac{1}{4}\, V^{(3)}_{ikms} h_t & \text{или} & V^{(4)}_{ikmst} = \tfrac{1}{4}\, V_{ikms} h_t
\end{array}$$

где $V^{(o)}_{i} = v_i = 1$ — объём точки i;

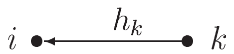
$V^{(1)}_{ik} = \ell_{ik}$ — расстояние между точками i и k;

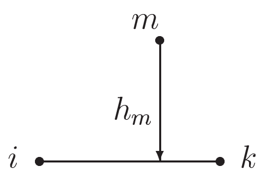
$V^{(2)}_{ikm} = S_{ikm}$ — площадь треугольника с вершинами $i,\ k,\ m$;

$V^{(3)}_{ikms} = V_{ikms}$ — объём тетраэдра с вершинами $i,\ k,\ m,\ s$;

$V^{(4)}_{ikmst}$ — четырёхмерный объём пентаэдра с вершинами $i,\ k,\ m,\ s,\ t$;

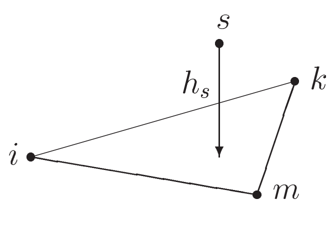
h_k — длина перпендикуляра в одномерном евклидовом пространстве, опущенного из точки k на точку i;

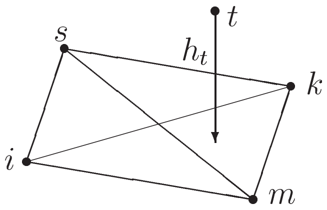




h_m — длина перпендикуляра в двумерном евклидовом пространстве, опущенного из точки m на отрезок с вершинами $i,\ k$;

h_s — длина перпендикуляра в трёхмерном евклидовом пространстве, опущенного из точки s на треугольник с вершинами $i,\ k,\ m$;





h_t — длина перпендикуляра в четырёхмерном евклидовом пространстве, опущенного из точки t на тетраэдр с вершинами $i,\ k,\ m,\ s$.

Воспользуемся соотношениями

$$\mathcal{K}_{i_1\ldots i_n i_{n+1};\ i_1\ldots i_n i_{n+1}} = 2^n (n!)^2 (V^{(n)}_{i_1\ldots i_n i_{n+1}})^2$$

$$\mathcal{K}_{i_1\ldots i_n;\ i_1\ldots i_n} = 2^{n-1}[(n-1)!]^2 (V^{(n-1)}_{i_1\ldots i_n})^2$$

и выразим высоту $(n+1)$ -точечного симплекса $\{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}\}$ через определители Кэли-Менгера:

$$h_{n+1} = n\frac{V^{(n)}_{i_1\ldots i_n i_{n+1}}}{V^{(n-1)}_{i_1\ldots i_n}} = \sqrt{\frac{\mathcal{K}_{i_1\ldots i_n i_{n+1};\ i_1\ldots i_n i_{n+1}}}{2\mathcal{K}_{i_1\ldots i_n;\ i_1\ldots i_n}}}$$

Особый интерес представляет собой выражение для наименьшей высоты

$$h^*_{n+1} = \sqrt{\frac{\mathcal{K}_{i_1\ldots i_n i_{n+1};\ i_1\ldots i_n i_{n+1}}}{2\mathcal{K}^*{}_{i_1\ldots i_n;\ i_1\ldots i_n}}} \tag{15}$$

$(n+1)$ -точечного симплекса $\{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}\}$, когда в качестве его основания выбирается грань, то есть симплекс $\{i_1,\ldots,i_n\}$, с наибольшим объёмом, или что то же самое, с наибольшим значением определителя Кэли-Менгера

$$\mathcal{K}^*{}_{i_1\ldots i_n;\ i_1\ldots i_n} \geqslant \mathcal{K}_{i_1\ldots i_{n-1} i_{n+1};\ i_1\ldots i_{n-1} i_{n+1}} \geqslant \mathcal{K}_{i_1\ldots i_{n-2} i_n i_{n+1};\ i_1\ldots i_{n-2} i_n i_{n+1}} \geqslant \ \ldots$$

$$\ldots\ \geqslant \mathcal{K}_{i_2\ldots i_n i_{n+1};\ i_2\ldots i_n i_{n+1}}$$

Выражение (15) для h^*_{n+1} позволяет дать следующее определение:

Мы будем говорить, что на множестве $\mathfrak{M}_{\Delta_n} = \{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1},\ldots\}$ задана структура n *-мерного евклидова пространства конечной толщины* Δ_n, если для любого $(n+1)$ -точечного симплекса $\{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}\} \subset \mathfrak{M}_{\Delta_n}$, имеет место следующее неравенство:

$$\sqrt{\frac{\mathcal{K}_{i_1\ldots i_n i_{n+1};\ i_1\ldots i_n i_{n+1}}}{2\mathcal{K}^*{}_{i_1\ldots i_n;\ i_1\ldots i_n}}} \leqslant \Delta_n$$

Так, например, если $\forall\ i_1,i_2,i_3,i_4\ \in \mathfrak{M}_{\Delta_2}$

$$\sqrt{\frac{\mathcal{K}_{i_1,i_2,i_3;\ i_1,i_2,i_3}}{2\mathcal{K}^*{}_{i_1,i_2;\ i_1,i_2}}} \leqslant \Delta_2 \qquad \text{и} \qquad \mathcal{K}_{i_1,i_2,i_3,i_4;\ i_1,i_2,i_3,i_4} \equiv 0,$$

то двумерное евклидово пространство конечной толщины Δ_2 представляет собой полосу шириной Δ_2 , расположенную на евклидовой плоскости (См. рис. 6).

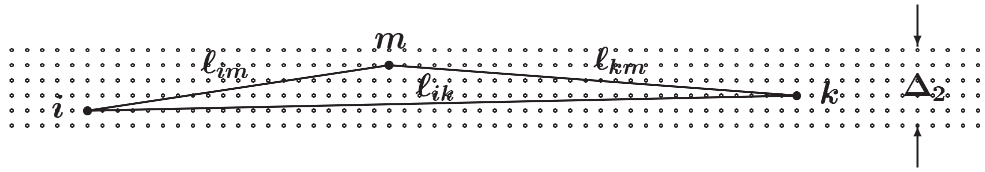


Рис. 6. Отличная от нуля площадь треугольника с вершинами i, k, m внутри узкой полосы шириной Δ_2 .

Заметим при этом, что расстояния ℓ_{ik} и площади S_{ikm} в этой полосе могут быть как угодно велики, но высота треугольника, опущенная на его самую большую сторону, не может превышать ширину полосы Δ_2 .

Если $\forall\ i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\ \in \mathfrak{M}_{\Delta_3}$

$$\sqrt{\frac{\mathcal{K}_{i_1,i_2,i_3,i_4;\ i_1,i_2,i_3,i_4}}{2\mathcal{K}^*{}_{i_1,i_2,i_3;\ i_1,i_2,i_3}}} \leqslant \Delta_3 \qquad \text{и} \qquad \mathcal{K}_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5;\ i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} \equiv 0,$$

то трёхмерное евклидово пространство конечной толщины Δ_3 представляет собой слой толщины Δ_3 , расположенный в трёхмерном евклидовом пространстве (См. рис. 7).

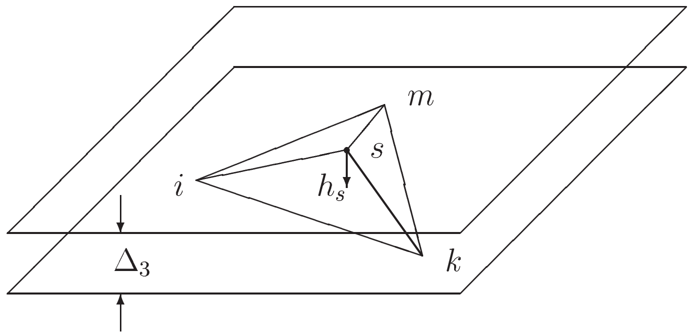


Рис. 7. Отличный от нуля объём тетраэдра с вершинами i, k, m, s в тонком слое толщиной Δ_3 .

В этом случае расстояния ℓ_{ik} , площади S_{ikm} и объёмы тетраэдров V_{ikms} в этом слое могут быть как угодно велики, но высота тетраэдра, опущенная на его самую большую грань, не может превышать толщину слоя Δ_3 .

И, наконец, если $\forall\ i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\ \in \mathfrak{M}_{\Delta_4}$

$$\sqrt{\frac{\mathcal{K}_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5;\ i_1,i_2,i_3,i_4,i_5}}{2\mathcal{K}^*{}_{i_1,i_2,i_3,i_4;\ i_1,i_2,i_3,i_4}}} \leqslant \Delta_4 \qquad \text{и} \qquad \mathcal{K}_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6;\ i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6} \equiv 0,$$

то четырёхмерное евклидово пространство конечной толщины Δ_4 представляет собой слой толщины Δ_4 , расположенный в четырёхмерном евклидовом пространстве.

В этом случае не существует каких-либо ограничений на величину расстояний, площадей и трёхмерных объёмов, но высота пентаэдра, опущенная на самый большой тетраэдр, играющий роль грани пентаэдра, не может превышать толщину четырёхмерного слоя Δ_4 . Человек не может "увидеть" высоту пентаэдра, но эта высота выражается формулой (15) через хорошо видимые и измеряемые расстояния между вершинами пентаэдра.

Подведём итоги:

если $\varepsilon^{(2r-2)}$ — отклонение от нуля r-точечного определителя Кэли-Менгера $\mathcal{K}_{i_1\dots i_r;\, i_1\dots i_r}$, то

$\delta_2 = \frac{1}{1!2^1}\,\frac{\sqrt{\varepsilon^{(4)}}}{\ell_{ik}}$ — толщина одномерного мира во втором измерении;

$\delta_3 = \frac{1}{2!2^{3/2}}\,\frac{\sqrt{\varepsilon^{(6)}}}{S_{ikm}}$ — толщина двумерного мира в третьем измерении;

$\delta_4 = \frac{1}{3!2^2}\,\frac{\sqrt{\varepsilon^{(8)}}}{V_{ikms}}$ — толщина трёхмерного мира в четвёртом измерении;

Таким образом, если, проведя точные измерения расстояний между любыми шестью телами нашего мира, мы обнаружим, что

$$\mathcal{K}_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5;\; i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} \not\equiv 0 \qquad \text{однако} \qquad \mathcal{K}_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6;\; i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6} \equiv 0$$

(или с учётом погрешностей измерений расстояний

$$|\mathcal{K}_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5;\; i_1,i_2,i_3,i_4,i_5}| > \delta_4 \qquad \text{а} \qquad |\mathcal{K}_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6;\; i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6}| < \delta_5,$$

где δ_4 и δ_5 — систематические погрешности измерений соответствующих определителей), то в этом случае мы можем сказать, что **с точностью до** $\delta\ell$ **наш мир является четырёхмерным слоем толщины** δ_4.

§ 12. Наш мир как трёхмерное пространство постоянной кривизны.

Допустим, что *отклонение определителя* $\mathcal{K}_5$ *от нуля обусловлено тем, что наш мир представляет собой трёхмерное пространство очень малой постоянной положительной или отрицательной кривизны.*

Чтобы выразить соотношение, связывающее между собой десять расстояний пяти-точечного симплекса в пространстве постоянной кривизны, обратимся к определителю Грама в четырёхмерном линейном пространстве.

Известно, что в n-мерном линейном пространстве любые $n+1$ векторов

$$\vec{i}_1,\ \vec{i}_2,\ \dots,\vec{i}_{n+1} \in L_n$$

линейно зависимы, то есть существует $n+1$ чисел $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n+1}$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$\alpha_1\vec{i}_1 + \alpha_2\vec{i}_2 + \ldots + \alpha_{n+1}\vec{i}_{n+1} = 0. \tag{16}$$

Умножая равенство (16) скалярно на векторы $\vec{i}_1,\ \vec{i}_2,\ \ldots,\vec{i}_{n+1}$ получим систему $n+1$ линейных однородных уравнений относительно $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1}$

$$\begin{gathered}
\alpha_1(\vec{i}_1\vec{i}_1) + \alpha_2(\vec{i}_1\vec{i}_2) + \ldots + \alpha_{n+1}(\vec{i}_1\vec{i}_{n+1}) = 0\\
\alpha_1(\vec{i}_2\vec{i}_1) + \alpha_2(\vec{i}_2\vec{i}_2) + \ldots + \alpha_{n+1}(\vec{i}_2\vec{i}_{n+1}) = 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_1(\vec{i}_{n+1}\vec{i}_1) + \alpha_2(\vec{i}_{n+1}\vec{i}_2) + \ldots + \alpha_{n+1}(\vec{i}_{n+1}\vec{i}_{n+1}) = 0.
\end{gathered}$$

Чтобы эта система уравнений имела отличные от нуля решения, необходимо, чтобы $(n+1)$ -векторный определитель Грама $n+1$ порядка обращался в нуль:

$$\Gamma_{\vec{i}_1\ldots\vec{i}_{n+1};\ \vec{i}_1\ldots\vec{i}_{n+1}} = \begin{vmatrix} (\vec{i}_1\vec{i}_1) & (\vec{i}_1\vec{i}_2) & \ldots & (\vec{i}_1\vec{i}_{n+1})\\ (\vec{i}_2\vec{i}_1) & (\vec{i}_2\vec{i}_2) & \ldots & (\vec{i}_2\vec{i}_{n+1})\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ (\vec{i}_{n+1}\vec{i}_1) & (\vec{i}_{n+1}\vec{i}_2) & \ldots & (\vec{i}_{n+1}\vec{i}_{n+1}) \end{vmatrix} = 0, \tag{17}$$

Начнём с рассмотрения двумерного пространства постоянной кривизны.

Двумерное пространство постоянной положительной кривизны – это сфера радиуса R , вложенная в трёхмерное евклидово пространство.

Точки, лежащие на поверхности сферы, описываются векторами $\vec{r}$, модуль которых равен R . Таким образом, скалярное произведение $(\vec{i}\,\vec{k})$ двух векторов $\vec{i}$ и $\vec{k}$ может быть записано в виде:

$$(\vec{i}\,\vec{k}) = R^2\cos\varphi_{ik} = R^2\cos\frac{\lambda_{ik}}{R}, \tag{18}$$

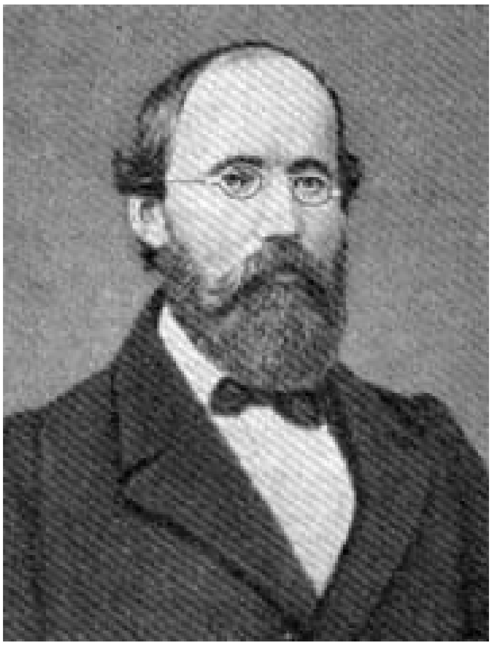
где φ_{ik} — угол между векторами $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_k$;
λ_{ik} — расстояние между точками i и k , измеренное вдоль дуги большого круга.

Подставляя выражения скалярных произведений (18) в тождество (17), получим соотношение, связывающее между собой шесть расстояний

$$\begin{matrix} \lambda_{ik} & \lambda_{im} & \lambda_{is}\\ & \lambda_{km} & \lambda_{ks}\\ & & \lambda_{ms} \end{matrix} \tag{19}$$

между четырьмя точками $i, k, m, s,$ произвольно расположенными на сфере радиуса R:

$$\Gamma_{ikms;\ ikms}(\cos\frac{\lambda}{R}) = \begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\lambda_{ik}}{R} & \cos\frac{\lambda_{im}}{R} & \cos\frac{\lambda_{is}}{R}\\ \cos\frac{\lambda_{ik}}{R} & 1 & \cos\frac{\lambda_{km}}{R} & \cos\frac{\lambda_{ks}}{R}\\ \cos\frac{\lambda_{im}}{R} & \cos\frac{\lambda_{km}}{R} & 1 & \cos\frac{\lambda_{ms}}{R}\\ \cos\frac{\lambda_{is}}{R} & \cos\frac{\lambda_{ks}}{R} & \cos\frac{\lambda_{ms}}{R} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$



Бернгард Риман (1826 – 1866)

Как на опыте убедиться в том, что все точки, образующие множество $\mathfrak{N} = \{i, k, \ldots\}$ лежат на некоторой невидимой сфере? и как измерить радиус этой сферы?

Для этого нужно взять из множества $\mathfrak{N}$ четыре произвольные точки i, k, m, s и измерить шесть расстояний (19).

Считая их известными и рассматривая соотношение (20) как некоторое трансцендентное уравнение относительно неизвестного радиуса R, найдём его решение[42], лежащее в интервале $\frac{\lambda_{max}}{\pi} < R < \infty$. Если при любом выборе четырёх точек $i, k, m, s \in \mathfrak{N}$, каждый раз неизвестный радиус R, входящий в уравнение (20), имеет одно и то же численное значение, то мы будем говорить, что на множестве $\mathfrak{N}$ задана структура двумерного пространства постоянной положительной кривизны или, другими словами, задана структура двумерного эллиптического пространства Римана.

Однако может случиться так, что при заданных расстояниях λ_{ik} уравнение (20) не имеет вещественных решений. Тогда вместо уравнения (20) необходимо рассмотреть уравнение

$$\Gamma_{ikms;\ ikms}(\mathrm{ch}\,\frac{\lambda}{R}) = \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{ik}}{R} & \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{im}}{R} & \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{is}}{R} \\ \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{ik}}{R} & 1 & \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{km}}{R} & \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{ks}}{R} \\ \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{im}}{R} & \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{km}}{R} & 1 & \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{ms}}{R} \\ \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{is}}{R} & \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{ks}}{R} & \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{ms}}{R} & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (21)$$

которое получается из уравнения (20) при замене в нём вещественного радиуса R на мнимый iR, так что

$$\cos\frac{\lambda_{ik}}{iR} = \mathrm{ch}\,\frac{\lambda_{ik}}{R}.$$

Если при любом выборе четырёх точек $i, k, m, s \in \mathfrak{N}$ каждый раз неизвестный радиус R, входящий в уравнение (21), имеет одно и то же численное значение, то мы будем говорить, что на множестве $\mathfrak{N}$ задана структура двумерного пространства постоянной отрицательной кривизны или, другими словами, задана структура двумерного гиперболического пространства Лобачевского.

Совершенно аналогичным образом решается вопрос о кривизне "нашего" трёхмерного пространства. Только в этом случае вместо четырёх точек нужно взять пять $i, k, m, s, t \in \mathfrak{N}$, измерить десять расстояний

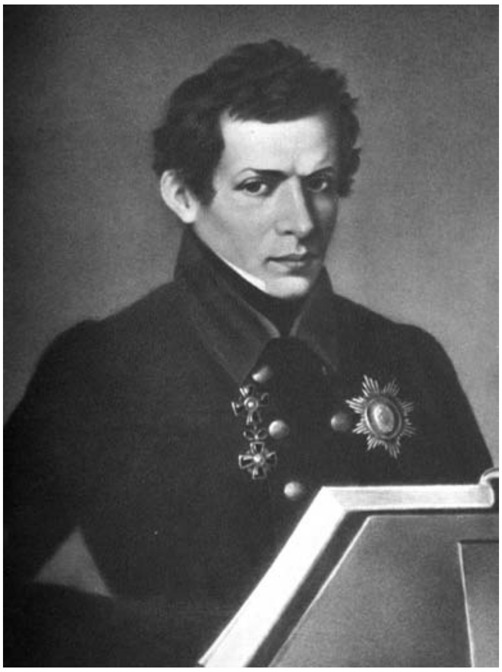
[42]Решение уравнения (20) при заданных расстояниях λ_{ik} естественно находить на персональном компьютере методом последовательного перебора.

$$\begin{array}{cccc}
\lambda_{ik} & \lambda_{im} & \lambda_{is} & \lambda_{it} \\
 & \lambda_{km} & \lambda_{ks} & \lambda_{kt} \\
 & & \lambda_{ms} & \lambda_{mt} \\
 & & & \lambda_{st}
\end{array}$$

и рассмотреть следующие два вида соотношений:

$$\Gamma_{ikms;\ ikms}(\cos\frac{\lambda}{R}) = \begin{vmatrix}
1 & \cos\frac{\lambda_{ik}}{R} & \cos\frac{\lambda_{im}}{R} & \cos\frac{\lambda_{is}}{R} & \cos\frac{\lambda_{it}}{R} \\
\cos\frac{\lambda_{ik}}{R} & 1 & \cos\frac{\lambda_{km}}{R} & \cos\frac{\lambda_{ks}}{R} & \cos\frac{\lambda_{kt}}{R} \\
\cos\frac{\lambda_{im}}{R} & \cos\frac{\lambda_{km}}{R} & 1 & \cos\frac{\lambda_{ms}}{R} & \cos\frac{\lambda_{mt}}{R} \\
\cos\frac{\lambda_{is}}{R} & \cos\frac{\lambda_{ks}}{R} & \cos\frac{\lambda_{ms}}{R} & 1 & \cos\frac{\lambda_{st}}{R} \\
\cos\frac{\lambda_{it}}{R} & \cos\frac{\lambda_{kt}}{R} & \cos\frac{\lambda_{mt}}{R} & \cos\frac{\lambda_{st}}{R} & 1
\end{vmatrix} = 0, \qquad (22)$$

$$\Gamma_{ikms;\ ikms}(\operatorname{ch}\frac{\lambda}{R}) = \begin{vmatrix}
1 & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{ik}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{im}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{is}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{it}}{R} \\
\operatorname{ch}\frac{\lambda_{ik}}{R} & 1 & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{km}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{ks}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{kt}}{R} \\
\operatorname{ch}\frac{\lambda_{im}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{km}}{R} & 1 & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{ms}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{mt}}{R} \\
\operatorname{ch}\frac{\lambda_{is}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{ks}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{ms}}{R} & 1 & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{st}}{R} \\
\operatorname{ch}\frac{\lambda_{it}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{kt}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{mt}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\lambda_{st}}{R} & 1
\end{vmatrix} = 0, \qquad (23)$$



Николай Лобачевский (1792 – 1856)

Если при любом выборе пяти точек $i, k, m, s, t \in \mathfrak{N}$, каждый раз неизвестный радиус R, входящий в уравнение (22), имеет одно и то же численное значение, то мы будем говорить, что на множестве $\mathfrak{N}$ задана структура трёхмерного пространства постоянной положительной кривизны или, другими словами, задана структура трёхмерного эллиптического пространства Римана. Точно так же, если при любом выборе пяти точек $i, k, m, s, t \in \mathfrak{N}$, каждый раз неизвестный радиус R, входящий в уравнение (23), имеет одно и то же численное значение, то мы будем говорить, что на множестве $\mathfrak{N}$ задана структура трёхмерного пространства постоянной отрицательной кривизны или, другими словами, задана структура трёхмерного гиперболического пространства Лобачевского.

В случае, когда $\frac{\lambda}{R} \ll 1$ решения уравнений (20)–(23) можно существенно упростить, если перейти от расстояний λ_{ik}, измеряемых по дуге большого круга, то есть по геодезической, к длинам ℓ_{ik} хорд, соединяющих между собой точки i и k .

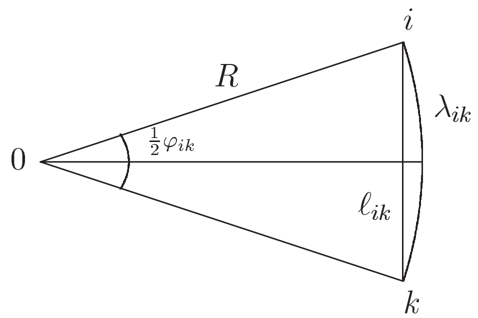


Рис. 8. К определению зависимости длины хорды ℓ_{ik} от длины дуги λ_{ik} .

Легко видеть (см. рис. 8), что

$$\ell_{ik} = 2R\sin\tfrac{\lambda_{ik}}{2R}$$

или

$$\ell_{ik} = 2R\,\mathrm{sh}\,\tfrac{\lambda_{ik}}{2R} = 2iR\sin\tfrac{\lambda_{ik}}{2iR}$$

Замечая, что

$$\cos\tfrac{\lambda_{ik}}{R} = 1 - 2\sin^2\tfrac{\lambda_{ik}}{2R} = 1 - \tfrac{\ell_{ik}^2}{2R^2}$$

и

$$\mathrm{ch}\,\tfrac{\lambda_{ik}}{R} = 1 + 2\,\mathrm{sh}^2\tfrac{\lambda_{ik}}{2R} = 1 + \tfrac{\ell_{ik}^2}{2R^2}$$

преобразуем уравнения (22) и (23) к виду:

$$\Gamma_{ikmst;\,ikmst}(\cos\frac{\lambda}{R}) = \left(-\frac{1}{2R^2}\right)^3 \begin{vmatrix} -\frac{1}{2R^2} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{is}^2 & \ell_{it}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{ks}^2 & \ell_{kt}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{ms}^2 & \ell_{mt}^2 \\ -1 & \ell_{is}^2 & \ell_{ks}^2 & \ell_{ms}^2 & 0 & \ell_{st}^2 \\ -1 & \ell_{it}^2 & \ell_{kt}^2 & \ell_{mt}^2 & \ell_{st}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (24)$$

и аналогично

$$\Gamma_{ikmst;\,ikmst}(\mathrm{ch}\,\frac{\lambda}{R}) = \left(\frac{1}{2R^2}\right)^3 \begin{vmatrix} \frac{1}{2R^2} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{is}^2 & \ell_{it}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{ks}^2 & \ell_{kt}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{ms}^2 & \ell_{mt}^2 \\ -1 & \ell_{is}^2 & \ell_{ks}^2 & \ell_{ms}^2 & 0 & \ell_{st}^2 \\ -1 & \ell_{it}^2 & \ell_{kt}^2 & \ell_{mt}^2 & \ell_{st}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (25)$$

Из уравнений (24) и (25) легко находим численное значение и знак постоянной кривизны “нашего” трёхмерного пространства:

$$K = \frac{1}{\varepsilon R^2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{is}^2 & \ell_{it}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{ks}^2 & \ell_{kt}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{ms}^2 & \ell_{mt}^2 \\ -1 & \ell_{is}^2 & \ell_{ks}^2 & \ell_{ms}^2 & 0 & \ell_{st}^2 \\ -1 & \ell_{it}^2 & \ell_{kt}^2 & \ell_{mt}^2 & \ell_{st}^2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{is}^2 & \ell_{it}^2 \\ \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{ks}^2 & \ell_{kt}^2 \\ \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{ms}^2 & \ell_{mt}^2 \\ \ell_{is}^2 & \ell_{ks}^2 & \ell_{ms}^2 & 0 & \ell_{st}^2 \\ \ell_{it}^2 & \ell_{kt}^2 & \ell_{mt}^2 & \ell_{st}^2 & 0 \end{vmatrix}}, \tag{26}$$

где $\varepsilon = \pm 1$.

Полученное выражение (26) для кривизны “нашего” трёхмерного пространства является математически точным следствием из соотношений (22) и (23). Однако с точки зрения физики, формула (26) является приближённой, так как в неё, вместо измеряемых на опыте расстояний между двумя точками i и k вдоль геодезических λ_{ik}, входят неизмеряемые длины хорд ℓ_{ik}. Однако, как легко видеть из соотношений $\ell_{ik} = 2R\sin\frac{\lambda_{ik}}{2R}$ или $\ell_{ik} = 2R\,\mathrm{sh}\,\frac{\lambda_{ik}}{2R}$, отличие ℓ_{ik} от λ_{ik} мало, если $\frac{\lambda_{ik}}{R} \ll 1$.

§ 13. Существование “реального” (физического) пространства как опытный факт.

Итак, после всего сказанного видно, каким эффективным инструментом являются r-точечные определители Кэли-Менгера[43] $\mathcal{K}_{i_1,\ldots,i_r;\; i_1,\ldots,\text{ß}_r}$ и r-векторные определители Грама

$$\Gamma_{i_1,\ldots,\text{ß}_r;\; i_1,\ldots,\text{ß}_r;}\,(\cos\tfrac{\lambda}{R})$$
$$\Gamma_{i_1,\ldots,\text{ß}_r;\; i_1,\ldots,\text{ß}_r;}\,(\mathrm{ch}\,\tfrac{\lambda}{R})$$

при анализе понятия пространства.

Более того, в следующих главах мы покажем, как легко и естественно решается, при этом с единых позиций, проблема основания линейной алгебры (теории линейных пространств) и самых различных геометрий произвольных размерностей, таких как

- евклидова и псевдоевклидова геометрии,
- эллиптическая геометрия Римана и
- гиперболическая геометрия Лобачевского,
- чётномерная и нечётномерная симплектические геометрии,
- проективная геометрия.

[43] В связи с этим вызывает недоумение отсутствие всяких упоминаний об определителе Кэли-Менгера в пятитомной Математической энциклопедии [12] и в большом Математическом энциклопедическом словаре [15]

Использование определителей Кэли-Менгера и определителей Грама позволяет по измеренным расстояниям между точками судить о размерности и кривизне соответствующих пространств.

Так, если равенства

$$\mathcal{K}_{ikm;\;ikm}(\ell^2) = 0\;,$$
$$\mathcal{K}_{ikms;\;ikms}(\ell^2) = 0\;,$$
$$\mathcal{K}_{ikmst;\;ikmst}(\ell^2) = 0\;,$$
$$\mathcal{K}_{ikmstu;\;ikmstu}(\ell^2) = 0$$

выполняются в пределах заранее известных ошибок измерений, то мы имеем дело, соответственно,

с евклидовой прямой (точнее, с одномерным многообразием),

с евклидовой (псевдоевклидовой) плоскостью,

с трёхмерным евклидовым (псевдоевклидовым) пространством и, наконец,

с четырёхмерным евклидовым (псевдоевклидовым) пространством.

С другой стороны, если в пределах заранее известных ошибок измерения выполняются равенства:

$$\Gamma_{ikms;\;ikms}(\cos\tfrac{\lambda}{R}) = 0 \quad \text{или} \quad \Gamma_{ikms;\;ikms}(\operatorname{ch}\tfrac{\lambda}{R}) = 0$$
$$\Gamma_{ikmst;\;ikmst}(\cos\tfrac{\lambda}{R}) = 0 \quad \text{или} \quad \Gamma_{ikmst;\;ikmst}(\operatorname{ch}\tfrac{\lambda}{R}) = 0$$

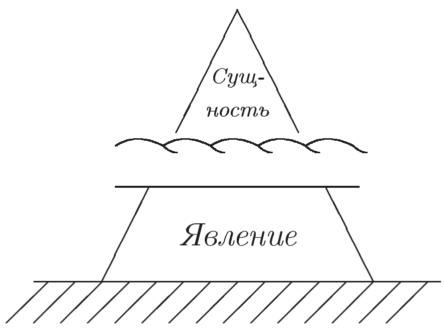
то мы имеем дело, соответственно,

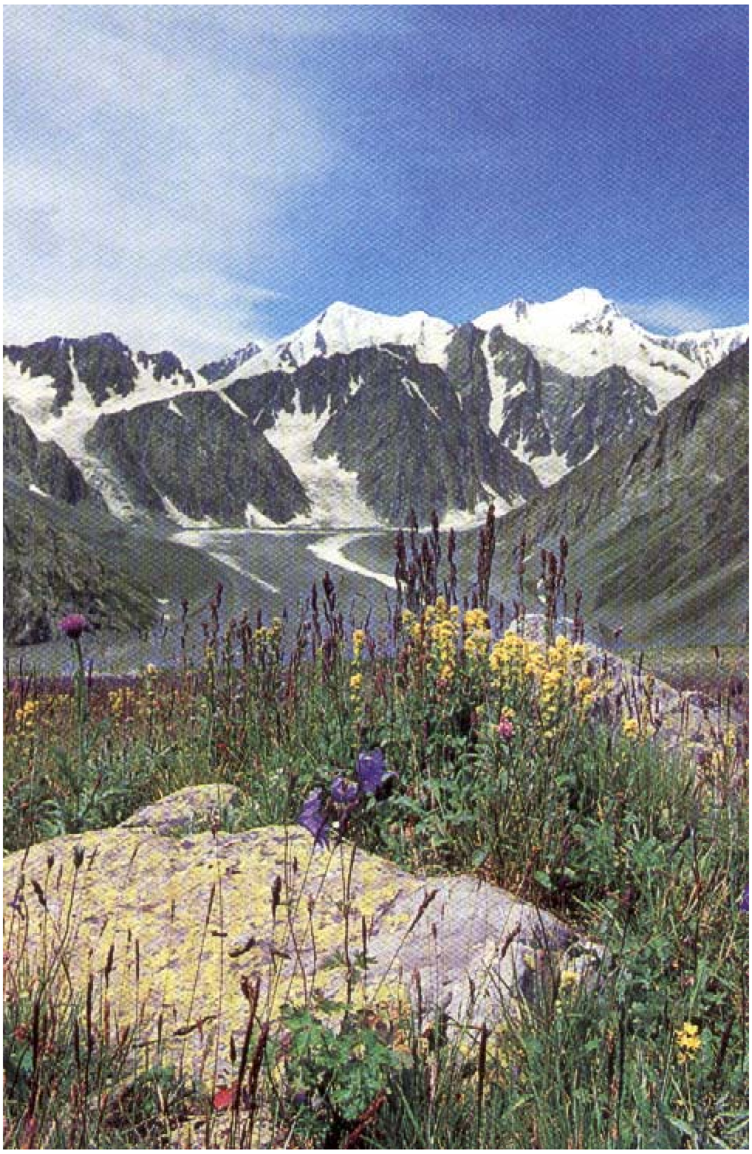
с двумерной сферой или с двумерной гиперболической плоскостью Лобачевского,

с трёхмерным пространством постоянной положительной или отрицательной кривизны.

Но в принципе не исключена возможность, что при достаточно высокой точности измерения расстояния величи́ны всех перечисленных выше определителей будут лежать за пределами ошибок измерения.

В этом случае мы должны сказать, что несмотря на то, что существуют тела (точки) и расстояния между ними, **не существует пространства в истинном смысле этого слова**, как устойчивого (не зависящего от конкретного выбора точек) отношения между фиксированным числом точек $r = n+2$ (между тремя точками на прямой, четырьмя точками на плоскости, между пятью точками в трёхмерном пространстве).





Гора Белуха – высочайшая вершина Горного Алтая

Литература к главе 6

[1] *Каган В.Ф.* Основания геометрии, часть I. М. – Л.: Наука, 1949, С. 16 - 17.

[2] *Мах Эрнст*//Альберт Эйнштейн и теория гравитации. - М.: Мир, 1979. С. 82.

[3] *Пуанкаре Анри.* Идеи Герца в механике //Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: 1959. С. 311, 316.

[4] *Кулаков Ю. И., Сычёва Л. С.* Теория физических структур как программа обоснования физики и как исследовательская программа в математике. // Исследовательские программы в современной науке. Новосибирск. Наука. 1987. с. 99–120.

[5] *Бахман Ф.* Построение геометрии на основе понятия симметрии, пер. с нем. — М.: 1969.

[6] *Blumenthal Leonard Mascot*, Theory and applications of distance geometry, Clarendon press, 1953, XII, 348 p.

[7] *Bell E.T.*, Men of Mathematics, N.Y., 1937, p. 21. Цитируется по книге Коксрера “Введение в геометрию”, — М.: Наука, 1966, С. 167.

[8] *Вейнберг С.*, Гравитация и космология. — М.: Мир, 1975, С.18

[9] *Гильберт Давид.* Основания геометрии, пер. с нем. М. – Л.: 1948.

[10] *Клайн М.*, Математика. Утрата определённости. М.: Мир, 1984, С.58, 409.

[11] *Кулаков Ю.И.* Теория размерности физических величин // Вычислительные системы. Выпуск 110. Новосибирск, Изд-во Института математики СОАН СССР. 1985, С. 52 - 88.

[12] *Математическая энциклопедия:* Гл. ред. И.М. Виноградов. Т. 1 – Т. 5, – М.: “Советская энциклопедия”, 1977 – 1984.

[13] Menger K.// American Journal of Mathematics, 53 (1931), pp. 721 – 745.

[14] *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.*, Гравитация, Т. I. — М.: Мир, 1977, С. 380.

[15] Математический энциклопедический словарь. — М.: Советская энциклопедия, 1988. 847 с.

[16] *Погорелов А.В.* Основания геометрии, 4 изд. — М.: 1979.

[17] *Robb A.A.* Geometry of Time and Space, Univ. Press, Cambridge, England. 1936.

[18] *Robb A.A.* Geometry of Time and Space, Univ. Press, Cambridge, England. 1914. (Первое издание геометрии расстояния.)

[19] *Синг Дж.*, Общая теория относительности. — М.: ИЛ, 1963, С.343

[20] *Эйнштейн Альберт.* Сущность теории относительности, — М.: ИЛ, 1955, С. 13.