Глава 7.

ЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ – ОЧЕВИДНАЯ И НЕВЕРОЯТНАЯ

NUN, NISI PARENDO, VINEITUR[44]

Мах был единственным, кто серьёзно думал об исключении понятия пространства, которое он пытался заменить представлением о всей сумме расстояний между всеми материальными точками.

— Альберт Эйнштейн

Евклидова геометрия – очевидная:

§ 1. Определители Кэли-Менгера – фундаментальное понятие евклидовой геометрии.

§ 2. Дважды окаймлённый верификатор. рода $\overset{n}{\boldsymbol{K}}{}^{11}_{i_1 \dots i_{n+1}; k_1 \dots k_{n+1}}$.

§ 3. Простейшая связь между расстояниями на прямой.

§ 4. Предварительное определение феноменологической структуры ранга 3 на одном множестве размерности 1.

§ 5. Простейшая связь между расстояниями на плоскости.

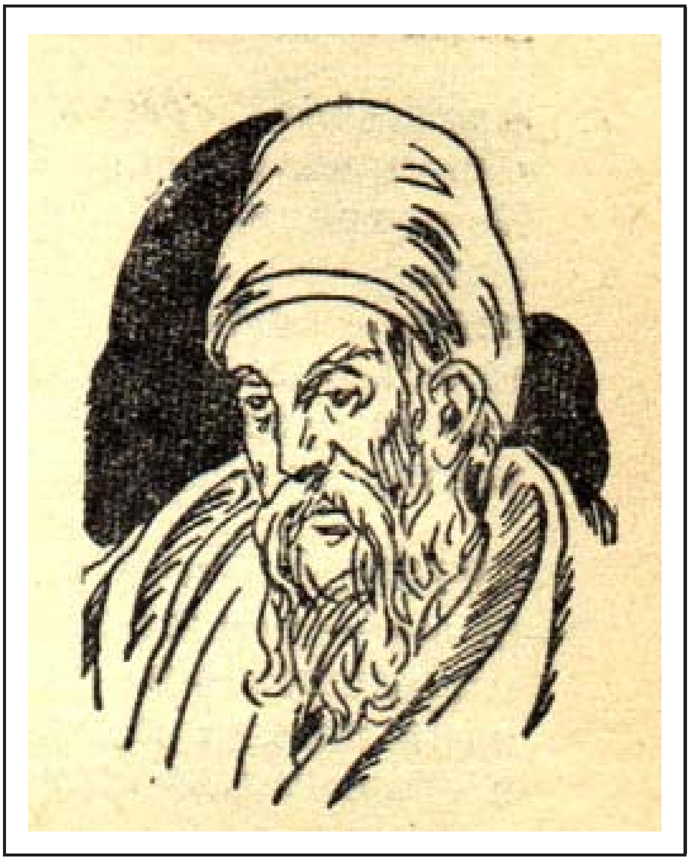
§ 6. Предварительное определение феноменологической структуры ранга 4 на одном множестве размерности 2.

§ 7. Простейшая связь между расстояниями в трёхмерном евклидовом пространстве.

§ 8. Предварительное определение феноменологической структуры ранга 5 на одном множестве размерности 3.

[44] Только тот побеждает её (природу), кто ей повинуется. (То есть, чтобы заставить природу служить нуждам человека, нужно знать её законы и им повиноваться.) Фр. Бэкон (1561 – 1626)

Евклидова геометрия – невероятная:



Евклид (365 – 300 до н.э.)

Древнегреческий математик, автор "Начал" – первого дошедшего до нас математического трактата.

Глава 7

I. Евклидова геометрия – очевидная.

Итак, на двух простейших примерах мы рассмотрели две физические структуры ранга (2,2) и (2, 3), описывающие определённые типы устойчивых (сакрально-инвариантных) отношений между двумя множествами $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ различной природы.

В то же самое время мы столкнулись с другим типом математических структур – с феноменологическими структурами "на одном множестве".

Примером таких феноменологических структур может служить хорошо известная всем евклидова геометрия.

§ 1. Определители Кэли-Менгера.

Итак, мы замечаем, что в выражениях (6)–(9) § 6 Главы 6 для объёмов симплексов с одной, с двумя, с тремя и с четырьмя вершинами появляются определители, имеющие сходное строение и представляющие собой специальные функции r нечисловых переменных $i_1, \ldots, i_r$:

$$\mathcal{K}_{i;i}(\overset{0}{\ell}{}^2) = (-1)^0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\mathcal{K}_{ik;ik}(\overset{1}{\ell}{}^2) = (-1)^1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{K}_{ikm;ikm}(\overset{2}{\ell}{}^2) = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{K}_{ikmn;ikmn}(\overset{3}{\ell}{}^2) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} & \ell^2_{in} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} & \ell^2_{kn} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 & \ell^2_{mn} \\ -1 & \ell^2_{in} & \ell^2_{kn} & \ell^2_{mn} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overset{N}{\ell}{}^2_{ik} = (x_\mu(i) - x_\mu(k))(x^\mu(i) - x^\mu(k)) = x_\mu(i)x^\mu(i) + x_\mu(k)x^\mu(k) - 2x_\mu(i)x^\mu(k)$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, N$$

Это и есть так называемые **определители Кэли-Менгера.**

Таким образом, определители Кэли-Менгера являются удобными функциями $n+1$ нечисловых переменных $i_1, \ldots, i_{n+1}$, позволяющими выразить квадраты объёмов n-мерных симплексов с вершинами $i_1, \ldots, i_{n+1}$ через квадраты расстояний между ними,:

$$2^o(0!)^2 v_i^2 = \mathcal{K}_{i;i}(\overset{0}{\ell}{}^2)$$
$$2^1(1!)^2 \ell_{ik}^2 = \mathcal{K}_{ik;ik}(\overset{1}{\ell}{}^2)$$
$$2^2(2!)^2 S_{ikm}^2 = \mathcal{K}_{ikm;ikm}(\overset{2}{\ell}{}^2)$$
$$2^3(3!)^2 V_{ikmn}^2 = \mathcal{K}_{ikmn;ikmn}(\overset{3}{\ell}{}^2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

В общем случае под определителем Кэли-Менгера мы будем понимать следующую функцию $2(N+1)$ нечисловых переменных $i_1, \ldots, i_{N+1}; k_1, \ldots, k_{N+1}$:

$$\mathcal{K}_{i_1,\ldots,i_{N+1};k_1,\ldots,k_{N+1}}(\varphi) = (-1)^N \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & \varphi_{i_1k_1} & \varphi_{i_1k_2} & \cdots & \varphi_{i_1k_{N+1}} \\ -1 & \varphi_{i_2k_1} & \varphi_{i_2k_2} & \cdots & \varphi_{i_2k_{N+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \varphi_{i_{N+1}k_1} & \varphi_{i_{N+1}k_2} & \cdots & \varphi_{i_{N+1}k_{N+1}} \end{vmatrix}.$$

Возьмём в качестве числовой переменной φ_{ik} квадрат расстояния между двумя точками i и k

$$\overset{N}{\ell}{}^2_{ik} = x_\mu(i)x^\mu(i) + x_\mu(k)x^\mu(k) - 2x_\mu(i)x^\mu(k) \qquad \mu = 1, 2, \ldots, N$$

В этом случае определители Кэли-Менгера $\mathcal{K}_{i_1,\ldots,i_{N+1};k_1,\ldots,k_{N+1}}(\overset{N}{\ell}{}^2)$ имеют простой геометрический смысл — они равны произведению объёмов соответствующих симплексов:

$$\mathcal{K}_{i_1;k_1}(\overset{0}{\ell}{}^2) = 2^0(0!)^2 v_{i_1} v_{k_1}$$
$$\mathcal{K}_{i_1i_2;k_1k_2}(\overset{1}{\ell}{}^2) = 2^1(1!)^2 \ell_{i_1i_2} \ell_{k_1k_2}$$
$$\mathcal{K}_{i_1i_2i_3;k_1k_2k_3}(\overset{2}{\ell}{}^2) = 2^2(2!)^2 S_{i_1i_2i_3} S_{k_1k_2k_3}$$
$$\mathcal{K}_{i_1i_2i_3i_4;k_1k_2k_3k_4}(\overset{3}{\ell}{}^2) = 2^3(3!)^2 V_{i_1i_2i_3i_4} V_{k_1k_2k_3k_4}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

§ 2. Дважды окаймлённые верификаторы рода $\overset{N}{\boldsymbol{K}}{}^{11}_{i_1,\ldots,i_{N+1};k_1,\ldots,k_{N+1}}$.

В связи с тем, что в качестве репрезентатора, характеризующего отношения между двумя точками i и k, наряду с очевидным квадратом расстояния между ними

$$\overset{N}{\ell}{}^2_{ik} = x_\mu(i)x^\mu(i) + x_\mu(k)x^\mu(k) - 2x_\mu(i)x^\mu(k) \qquad \mu = 1, 2, \ldots, N$$

удобно взять неизвестное ранее, более общее понятие – “скалярное произведение двух точек с двумя скрытыми параметрами”[45]

$$\overset{N}{w}_{ik} = x^o(k) + x(i)_\mu x^\mu(k) + x_o(i),$$

рассмотрим два определителя, играющие роль соответствующих верификаторов. Так наряду с уже известным определителем Кэли-Менгера

$$\mathcal{K}_{i_1 \ldots i_{N+1}; k_1 \ldots k_{N+1}}(\overset{N}{\ell}{}^2) = (-1)^N \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & \ell^2_{i_1k_1} & \ell^2_{i_1k_2} & \ldots & \ell^2_{i_1k_{N+1}} \\ -1 & \ell^2_{i_2k_1} & \ell^2_{i_2k_2} & \ldots & \ell^2_{i_2k_{N+1}} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -1 & \ell^2_{i_{N+1}k_1} & \ell^2_{i_{N+1}k_2} & \ldots & \ell^2_{i_{N+1}k_{N+1}} \end{vmatrix}$$

рассмотрим дважды окаймлённый определитель

$$\overset{N}{K}{}^{11}_{i_1 \ldots i_{N+1}; k_1 \ldots k_{N+1}}(\overset{N}{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & w_{i_1k_1} & w_{i_1k_2} & \ldots & w_{i_1k_{N+1}} \\ -1 & w_{i_2k_1} & w_{i_2k_2} & \ldots & w_{i_2k_{N+1}} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -1 & w_{i_{N+1}k_1} & w_{i_{N+1}k_2} & \ldots & w_{i_{N+1}k_{N+1}} \end{vmatrix},$$

связанный с определителем Кэли-Менгера следующим соотношением:

$$\mathcal{K}_{i_1 \ldots i_{N+1}; k_1 \ldots k_{N+1}}(\varphi) = (-1)^N \, \overset{N}{K}{}^{11}_{i_1 \ldots i_{N+1}; k_1 \ldots k_{N+1}}(\varphi)$$

и

$$\mathcal{K}_{i_1 \ldots i_{N+1}; k_1 \ldots k_{N+1}}(\overset{N}{\ell}{}^2) = 2^N \, \overset{N}{K}{}^{11}_{i_1 \ldots i_{N+1}; k_1 \ldots k_{N+1}}(\overset{N}{w})$$

То есть

$$\begin{gathered} \mathcal{K}_{i_1; k_1}(\overset{0}{\ell}{}^2) = 2^0 \, \overset{0}{K}{}^{11}_{i_1; k_1}(\overset{0}{w}) \\ \mathcal{K}_{i_1 i_2; k_1 k_2}(\overset{1}{\ell}{}^2) = 2^1 \, \overset{1}{K}{}^{11}_{i_1 i_2; k_1 k_2}(\overset{1}{w}) \\ \mathcal{K}_{i_1 i_2 i_3; k_1 k_2 k_3}(\overset{2}{\ell}{}^2) = 2^2 \, \overset{2}{K}{}^{11}_{i_1 i_2 i_3; k_1 k_2 k_3}(\overset{2}{w}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered} \overset{0}{K}{}^{11}_{i_1; k_1}(\overset{0}{w}) = (0!)^2 v_{i_1} \, v_{k_1} = \tilde{v}_{i_1} \, \tilde{v}_{k_1} \\ \overset{1}{K}{}^{11}_{i_1 i_2; k_1 k_2}(\overset{1}{w}) = (1!)^2 \ell_{i_1 i_2} \, \ell_{k_1 k_2} = \tilde{\ell}_{i_1 i_2} \, \tilde{\ell}_{k_1 k_2} \\ \overset{2}{K}{}^{11}_{i_1 i_2 i_3; k_1 k_2 k_3}(\overset{2}{w}) = (2!)^2 S_{i_1 i_2 i_3} \, S_{k_1 k_2 k_3} = \tilde{S}_{i_1 i_2 i_3} \, \tilde{S}_{k_1 k_2 k_3} \\ \overset{3}{K}{}^{11}_{i_1 i_2 i_3 i_4; k_1 k_2 k_3 k_4}(\overset{3}{w}) = (3!)^2 V_{i_1 i_2 i_3 i_4} \, V_{k_1 k_2 k_3 k_4} = \tilde{V}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \, \tilde{V}_{k_1 k_2 k_3 k_4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

[45] Скалярное произведение двух точек с двумя скрытыми параметрами является понятием более глубоким и фундаментальным, нежели квадрат расстояния между точками, так как квадрат расстояния ℓ^2_{ik} получается из скалярного произведения w_{ik} при двух естественных дополнительных условиях – симметрии $w_{ik} = w_{ki}$ и рефлексии $w_{ii} = 0$.

где

$$\overset{n}{w}_{ik} = -\frac{1}{2}\,\overset{n}{\ell^2}_{ik}$$

$v_{i_1} = \frac{1}{0!}|1| = 1$ — объём точки $[i_1]$,

$v_{k_1} = \frac{1}{0!}|1| = 1$ — объём точки $[k_1]$,

$\tilde{v}_{i_1} = |1| = 1$ — объём левого 1-точечного корта $\langle\, i_1 \,|$,

$\tilde{v}_{k_1} = |1| = 1$ — объём правого 1-точечного корта $|\, k_1 \,\rangle$;

$\ell_{i_1 i_2} = \frac{1}{1!}\begin{vmatrix} x_{i_1} & 1 \\ x_{i_2} & 1 \end{vmatrix} = x_{i_1} - x_{i_2}$ — длина отрезка $[i_1\, i_2]$

$\ell_{k_1 k_2} = \frac{1}{1!}\begin{vmatrix} x_{k_1} & x_{k_2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x_{k_1} - x_{k_2}$ — длина отрезка $[k_1\, k_2]$

$\tilde{\ell}_{i_1 i_2} = \begin{vmatrix} x_{i_1} & 1 \\ x_{i_2} & 1 \end{vmatrix} = x_{i_1} - x_{i_2}$ — объём левого 2-точечного корта $\langle\, i_1\, i_2 \,|$

$\tilde{\ell}_{k_1 k_2} = \begin{vmatrix} x_{k_1} & x_{k_2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x_{k_1} - x_{k_2}$ — объём правого 2-точечного корта $|\, k_1\, k_2 \,\rangle$

$S_{i_1 i_2 i_3} = \frac{1}{2!}\begin{vmatrix} x_{i_1} & y_{i_1} & 1 \\ x_{i_2} & y_{i_2} & 1 \\ x_{i_3} & y_{i_3} & 1 \end{vmatrix}$ — площадь треугольника $[i_1\, i_2\, i_3]$

$S_{k_1 k_2 k_3} = \frac{1}{2!}\begin{vmatrix} x_{k_1} & x_{k_2} & x_{k_3} \\ y_{k_1} & y_{k_2} & y_{k_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ — площадь треугольника $[k_1\, k_2\, k_3]$

$\tilde{S}_{i_1 i_2 i_3} = \begin{vmatrix} x_{i_1} & y_{i_1} & 1 \\ x_{i_2} & y_{i_2} & 1 \\ x_{i_3} & y_{i_3} & 1 \end{vmatrix}$ — объём левого 3-точечного корта $\langle\, i_1\, i_2\, i_3 \,|$

$\tilde{S}_{k_1 k_2 k_3} = \begin{vmatrix} x_{k_1} & x_{k_2} & x_{k_3} \\ y_{k_1} & y_{k_2} & y_{k_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ — объём правого 3-точечного корта $|\, k_1\, k_2\, k_3 \,\rangle$

$V_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} x_{i_1} & y_{i_1} & z_{i_1} & 1 \\ x_{i_2} & y_{i_2} & z_{i_2} & 1 \\ x_{i_3} & y_{i_3} & z_{i_3} & 1 \\ x_{i_4} & y_{i_4} & z_{i_4} & 1 \end{vmatrix}$ — объём тетраэдра $[i_1\, i_2\, i_3\, i_4]$

$V_{k_1 k_2 k_3 k_4} = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} x_{k_1} & x_{k_2} & x_{k_3} & x_{k_4} \\ y_{k_1} & y_{k_2} & y_{k_3} & y_{k_4} \\ z_{k_1} & z_{k_2} & z_{k_3} & z_{k_4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ — объём тетраэдра $[k_1\, k_2\, k_3\, k_4]$

$$\tilde{V}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \begin{vmatrix} x_{i_1} & y_{i_1} & z_{i_1} & 1 \\ x_{i_2} & y_{i_2} & z_{i_2} & 1 \\ x_{i_3} & y_{i_3} & z_{i_3} & 1 \\ x_{i_4} & y_{i_4} & z_{i_4} & 1 \end{vmatrix} \text{— объём левого 4-точечного корта } \langle\, i_1\, i_2\, i_3\, i_4 \,|$$

$$\tilde{V}_{k_1 k_2 k_3 k_4} = \begin{vmatrix} x_{k_1} & x_{k_2} & x_{k_3} & x_{k_4} \\ y_{k_1} & y_{k_2} & y_{k_3} & y_{k_4} \\ z_{k_1} & z_{k_2} & z_{k_3} & z_{k_4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{— объём правого 4-точечного корта } |\, k_1\, k_2\, k_3\, k_4 \,\rangle$$

Заметим, что дважды окаймлённые верификаторы рода $\overset{N}{K}{}^{11}_{i_1 \ldots i_{N+1}; k_1 \ldots k_{N+1}}(\overset{N}{w}\ )$ являются, как мы убедимся в этом в дальнейшем, менее наглядными, но более глубокими и фундаментальными, нежели определители Кэли-Менгера $\mathcal{K}_{i_1 \ldots i_{N+1}; k_1 \ldots k_{N+1}}(\overset{N}{\ell}{}^2)$.

§ 3. Простейшая связь между расстояниями на прямой.

Пусть $\mathfrak{M}_1 = \{i_1, i_2, \ldots\}$ – множество точек, лежащих на прямой. Рассмотрим симплекс

$$\mathfrak{S}_3 = \{i, k, m\} \subset \mathfrak{M}_1,$$

состоящий из трёх произвольных точек $i, k, m \in \mathfrak{M}_1$, и три соответствующие ему расстояния

$$\begin{matrix} \ell_{ik} & \ell_{im} \\ & \ell_{km} \end{matrix}$$

Поскольку три точки i, k, m лежат на одной прямой, то площадь треугольника с вершинами i, k, m, S_{ikm} очевидно равна нулю при любом взаимном расположении точек i, k, m .

Используя формулу Герона

$$S_{ikm} = \sqrt{p(p - \ell_{ik})(p - \ell_{im})(p - \ell_{km})},$$

$$\text{где } \ p = \tfrac{1}{2}(\ell_{ik} + \ell_{im} + \ell_{km})$$

или

$$S_{ikm} = \frac{1}{4}\sqrt{(\ell_{ik} + \ell_{im} + \ell_{km})(\ell_{ik} + \ell_{im} - \ell_{km})(\ell_{ik} - \ell_{im} + \ell_{km})(-\ell_{ik} + \ell_{im} + \ell_{km})} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2!}\sqrt{\ 2(\ell_{ik}^2 \ell_{im}^2 + \ell_{im}^2 \ell_{km}^2 + \ell_{km}^2 \ell_{ik}^2) - \ell_{ik}^4 - \ell_{im}^4 - \ell_{km}^4} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2!} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 \end{vmatrix}^{1/2}$$

то есть

$$S_{ikm} = \frac{1}{2\cdot 2!}[\mathcal{K}_{ikm,ikm}(\ell^2)]^{1/2} = \frac{1}{2!}[\overset{2}{K}{}^{11}_{ikm,ikm}(w)]^{1/2},$$

где

$$\mathcal{K}_{ikm,ikm}(\ell^2) = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 \end{vmatrix} \; -$$

трёхточечный определитель Кэли-Менгера;

$$\ell^2_{ik} = x_i^2 + x_k^2 - 2x_i x_k$$

$$\overset{2}{K}{}^{11}_{ikm,ikm}(w) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & w_{ik} & w_{im} \\ -1 & w_{ik} & 0 & w_{km} \\ -1 & w_{im} & w_{km} & 0 \end{vmatrix} -$$

трёхточечный дважды окаймлённый верификатор;

$$w_{ik} = -\frac{1}{2}\,x_k^2 + x_i x_k - \frac{1}{2}\,x_i^2 = -\frac{1}{2}\,\ell^2_{ik}$$

симметричное, рефлексивное скалярное произведение
двух точек i и k с двумя скрытыми параметрами;

можно придать этому утверждению вид универсального соотношения, связывающего три квадрата взаимных расстояний

$$w_{ik} = -\frac{1}{2}\,\ell^2_{ik}, \qquad w_{im} = -\frac{1}{2}\,\ell^2_{im}, \qquad w_{km} = -\frac{1}{2}\,\ell^2_{km}$$

произвольного симплекса $\mathfrak{S}_3 = \{i,k,m\}$ одномерного евклидова пространства:

$$\forall i,k,m \in \mathfrak{M}_1$$

$$\boxed{\Phi(w_{ik},\; w_{im},\; w_{km}) = \overset{2}{K}{}^{11}_{ikm,ikm}(w) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & w_{ik} & w_{im} \\ -1 & w_{ik} & 0 & w_{km} \\ -1 & w_{im} & w_{km} & 0 \end{vmatrix} \equiv 0} \qquad (1)$$

В существовании тождества (1) можно убедиться непосредственно, если воспользоваться следующим разложением $\overset{2}{K}{}^{11}_{ikm,ikm}(w)$ на множители:

так как $w_{ik} = -\frac{1}{2}x_k^2 + x_i x_k - \frac{1}{2}x_i^2$, то

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & w_{ik} & w_{im} \\ -1 & w_{ik} & 0 & w_{km} \\ -1 & w_{im} & w_{km} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & x_i & 0 & -\frac{1}{2}x_i^2 \\ -1 & x_k & 0 & -\frac{1}{2}x_k^2 \\ -1 & x_m & 0 & -\frac{1}{2}x_m^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2}x_i^2 & \frac{1}{2}x_k^2 & \frac{1}{2}x_m^2 \\ 0 & x_i & x_k & x_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_i & 0 & 1 \\ x_k & 0 & 1 \\ x_m & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i & x_k & x_m \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & 0 & 1 \\ x_k & 0 & 1 \\ x_m & 0 & 1 \end{vmatrix}^2 . \equiv 0$$

Опираясь на этот пример, дадим предварительное определение феноменологической структуры ранга 3 на одном множестве.

§ 4. Предварительное определение феноменологической структуры ранга 3 на одном множестве размерности 1.

Рассмотрим одно множество $\mathfrak{M}_1 = \{i, k, \ldots\}$ и отображение

$$\xi : \mathfrak{M}_1 \to \mathbb{R} \qquad\qquad i \mapsto \xi(i)$$

Мы будем говорить, что на множестве $\mathfrak{M}_1$ размерности 1 имеет место феноменологическая структура ранга 3, если существует вещественная функция двух вещественных переменных

$$\begin{gathered} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ u, u' \mapsto \varphi(u, u') \end{gathered}$$

такая, что три функции

$$\begin{matrix} \varphi(\xi_1, \xi_2) & \varphi(\xi_1, \xi_3) \\ & \varphi(\xi_2, \xi_3) \end{matrix} \qquad \text{где} \qquad \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3 \in \mathbb{R},$$

связаны между собой соотношением

$$\Psi\begin{pmatrix} \varphi(\xi_1, \xi_2), & \varphi(\xi_1, \xi_3), \\ & \varphi(\xi_2, \xi_3) \end{pmatrix} \equiv 0, \tag{2}$$

представляющим собой тождество относительно трёх независимых переменных $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$.

Задача состоит в том, чтобы найти две неизвестные функции

$$\varphi(u, u') \qquad \text{и} \qquad \Psi\begin{pmatrix} \varphi_{12}, & \varphi_{13}, \\ & \varphi_{23} \end{pmatrix},$$

обращающие равенство (2) в тождество.

Можно показать, что с точностью до эквивалентности имеется два и только два решения функционального уравнения (2):

1. антисимметрическое

$$\varphi_1(\xi_i, \xi_k) = a(\xi_i, \xi_k) = \xi_k - \xi_i$$

$$\Psi_1\begin{pmatrix} a(\xi_i, \xi_k), & a(\xi_i, \xi_k), \\ & a(\xi_i, \xi_k) \end{pmatrix} = \overset{2}{K}{}^{11}_{ikm,ikm}(a) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a_{ik} & a_{im} \\ -1 & -a_{ik} & 0 & a_{km} \\ -1 & -a_{im} & -a_{km} & 0 \end{vmatrix} = \tag{3}$$

$$= (a_{ik} + a_{km} - a_{im})^2$$

и 2. симметрическое

$$\varphi_2(\xi_i, \xi_k) = s(\xi_i, \xi_k) = (\xi_k - \xi_i)^2$$

$$\Psi_2(s(\xi_i,\xi_k), \quad \begin{matrix} s(\xi_i,\xi_k), \\ s(\xi_i,\xi_k)) \end{matrix} = \overset{2}{K}{}^{11}_{ikm,ikm}(s) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & s_{ik} & s_{im} \\ -1 & s_{ik} & 0 & s_{km} \\ -1 & s_{im} & s_{km} & 0 \end{vmatrix} = \qquad (4)$$

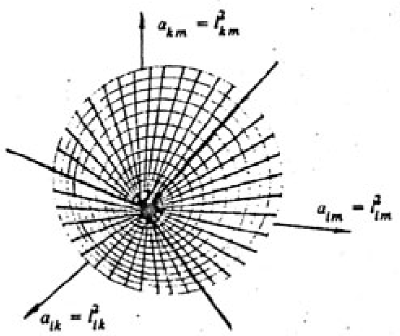
$$= 2(s_{ik}s_{im} + s_{im}s_{km} + s_{km}s_{ik}) - s_{ik}^2 - s_{im}^2 - s_{km}^2 =$$

$$\begin{aligned} &= (\sqrt{s_{ik}} + \sqrt{s_{im}} + \sqrt{s_{km}}) \times \\ &\times (\sqrt{s_{ik}} + \sqrt{s_{im}} - \sqrt{s_{km}}) \times \\ &\times (\sqrt{s_{ik}} - \sqrt{s_{im}} + \sqrt{s_{km}}) \times \\ &\times (-\sqrt{s_{ik}} + \sqrt{s_{im}} + \sqrt{s_{km}}) \end{aligned}$$

Первое антисимметрическое решение определяет собой структуру симплектической прямой (одномерного симплектического пространства).

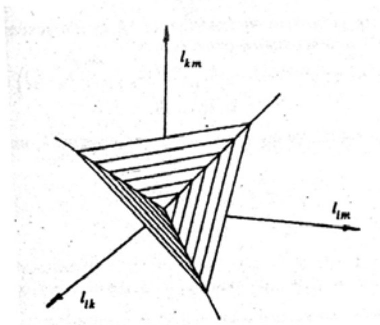
Второе симметрическое решение определяет собой структуру одномерной евклидовой прямой.

Уже на примере феноменологической структуры ранга 3 на одном множестве мы встречаемся с особым типом полиарных (в данном случае – тернарных) отношений между точками. Мы видим, что между тремя произвольными точками i, k, m симплектической или евклидовой прямой существует необычная связь: с одной стороны, точки i, k, m совершенно произвольны, а с другой — три расстояния a_{ik}, a_{im}, a_{km} в первом случае, и три квадрата расстояния $s_{ik} = \ell_{ik}^2$, $s_{im} = \ell_{im}^2$, $s_{km} = \ell_{km}^2$ не являются произвольными, так как связаны между собой соотношениями (3) и (4). Рассматривая каждый симплекс $\mathfrak{S}_3$ как некоторый единый физический объект, мы можем приписать ему три числа (три измеряемых на опыте квадрата расстояния). Трактуя их как три координаты симплексов $\mathfrak{S}_3$ в трёхмерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3$, мы тем самым сопоставляем каждому симплексу $\mathfrak{S}_3$ некоторую точку в $\mathbb{R}^3$. Эту точку мы будем называть характеристической точкой симплекса $\mathfrak{S}_3$, а само арифметическое пространство $\mathbb{R}^3$ характеристическим пространством.



$$2(s_{ik}s_{im} + s_{im}s_{km} + s_{km}s_{ik}) - s_{ik}^2 - s_{im}^2 - s_{km}^2 = 0$$

Рис. 8. Характеристическая поверхность феноменологической структуры ранга 3 в координатах s_{ik}, s_{im}, s_{km}.



$$2(\ell_{ik}^2\ell_{im}^2 + \ell_{im}^2\ell_{km}^2 + \ell_{km}^2\ell_{ik}^2) - \ell_{ik}^4 - \ell_{im}^4 - \ell_{km}^4 =$$
$$= (\ell_{ik} + \ell_{im} + \ell_{km})(\ell_{ik} + \ell_{im} - \ell_{km})(\ell_{ik} - \ell_{im} + \ell_{km})(-\ell_{ik} + \ell_{im} + \ell_{km}) \equiv 0$$

Рис. 9. Характеристическая поверхность феноменологической структуры ранга 3 в координатах ℓ_{ik}, ℓ_{im}, ℓ_{km}.

Факт существования соотношений (3) и (4) означает, что характеристические точки, соответствующие различным симплексам $\mathfrak{S}_3$, располагаются в трёхмерном характеристическом пространстве $\mathbb{R}^3$ не произвольно, а на некоторой двумерной поверхности (см. рис. 8 и 9), что и означает существование на прямой $\mathfrak{M}_1$ феноменологической структуры ранга 3.

§ 5. Простейшая связь между расстояниями на плоскости.

Пусть $\mathfrak{M}_2 = \{i_1, i_2, \ldots\}$ — множество точек, лежащих на одной плоскости. Рассмотрим симплекс

$$\mathfrak{S}_4 = \{i, k, m, n\} \subset \mathfrak{M}_2,$$

состоящий из четырёх произвольных точек $i, k, m, n \in \mathfrak{M}_2$, и шесть соответствующих ему расстояний

$$\begin{array}{ccc} \ell_{ik} & \ell_{im} & \ell_{in} \\ & \ell_{km} & \ell_{kn} \\ & & \ell_{mn} \end{array}.$$

Поскольку четыре точки i, k, m, n лежат на одной и той же плоскости, то объём тетраэдра с вершинами i, k, m, n V_{ikmn} очевидно равен нулю при любом взаимном расположении точек i, k, m, n .

Воспользуемся формулой Никколо Тартальи, выражающей, подобно формуле Герона, объём тетраэдра через длины его рёбер:

$$V_{ikmn} = \frac{1}{2^{3/2}\cdot 3!}[\mathcal{K}_{ikmn,ikmn}(\ell^2)]^{1/2} = \frac{1}{3!}[\overset{3}{K}{}^{11}_{ikmn,ikmn}(w)]^{1/2}$$

где

$$\mathcal{K}_{ikmn,ikmn}(\ell^2) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} & \ell^2_{in} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} & \ell^2_{kn} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 & \ell^2_{mn} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & \ell^2_{mn} & 0 \end{vmatrix} \text{ —}$$

четырёхточечный определитель Кэли-Менгера,

$$\ell^2_{ik} = x_i^2 + y_i^2 + x_k^2 + y_k^2 - 2x_ix_k - 2y_iy_k$$

$$\overset{3}{K}{}^{11}_{ikmn,ikmn}(w) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & w_{ik} & w_{im} & w_{in} \\ -1 & w_{ik} & 0 & w_{km} & w_{kn} \\ -1 & w_{im} & w_{km} & 0 & w_{mn} \\ -1 & w_{im} & w_{km} & w_{mn} & 0 \end{vmatrix} \text{ —}$$

четырёхточечный дважды окаймлённый верификатор,

$$w_{ik} = -\frac{1}{2}(x_k^2 + y_k^2) + x_ix_k + y_iy_k - \frac{1}{2}(x_k^2 + y_k^2) = -\frac{1}{2}\ell^2_{ik} \text{ —}$$

симметричное, рефлексивное скалярное произведение двух точек i и k с двумя скрытыми параметрами; и придадим этому утверждению вид универсального соотношения, связывающего шесть квадратов взаимных расстояний

$$\begin{array}{lll} w_{ik} = -\frac{1}{2}\ell^2_{ik}, & w_{im} = -\frac{1}{2}\ell^2_{im}, & w_{in} = -\frac{1}{2}\ell^2_{in} \\ & w_{km} = -\frac{1}{2}\ell^2_{km}, & w_{kn} = -\frac{1}{2}\ell^2_{kn}, \\ & & w_{mn} = -\frac{1}{2}\ell^2_{mn} \end{array}$$

произвольного симплекса $\mathfrak{S}_4 = \{i, k, m, n\}$ двумерной евклидовой плоскости:

$$\forall i, k, m, n \in \mathfrak{M}_2$$

$$\boxed{\Psi(w_{ik},\ w_{im},\ w_{in},\ w_{km},\ w_{kn},\ w_{mn}) = \overset{3}{K}{}^{11}_{ikmn,ikmn}(s) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & w_{ik} & w_{im} & w_{in} \\ -1 & w_{ik} & 0 & w_{km} & w_{kn} \\ -1 & w_{im} & w_{km} & 0 & w_{mn} \\ -1 & w_{in} & w_{kn} & w_{mn} & 0 \end{vmatrix} \equiv 0} \tag{5}$$

или ему эквивалентного тождества (6)

$$\Psi(\ell^2_{ik},\ \ell^2_{im},\ \ell^2_{in},\ \ell^2_{km},\ \ell^2_{kn},\ \ell^2_{mn}) = \mathcal{K}_{ikmn,ikmn}(\ell^2) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} & \ell^2_{in} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} & \ell^2_{kn} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 & \ell^2_{mn} \\ -1 & \ell^2_{in} & \ell^2_{kn} & \ell^2_{mn} & 0 \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{6}$$

В существовании тождества (6) можно убедиться непосредственно, если воспользоваться следующим разложением $\mathcal{K}_{ikmn,ikmn}(\ell^2)$ на множители:

так как $\quad \ell^2_{ik} = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 = x_i^2 + y_i^2 + x_k^2 + y_k^2 - 2x_ix_k - 2y_iy_k,$ то

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} & \ell^2_{in} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} & \ell^2_{kn} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 & \ell^2_{mn} \\ -1 & \ell^2_{in} & \ell^2_{kn} & \ell^2_{mn} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & x_i & y_i & 0 & x_i^2 + y_i^2 \\ -1 & x_k & y_k & 0 & x_k^2 + y_k^2 \\ -1 & x_m & y_m & 0 & x_m^2 + y_m^2 \\ -1 & x_n & y_n & 0 & x_n^2 + y_n^2 \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & -(x_i^2 + y_i^2) & -(x_k^2 + y_k^2) & -(x_m^2 + y_m^2) & -(x_n^2 + y_n^2) \\ 0 & -2x_i & -2x_k & -2x_m & -2x_n \\ 0 & -2y_i & -2y_k & -2y_m & -2y_n \\ 0 & -2 \cdot 0 & -2 \cdot 0 & -2 \cdot 0 & -2 \cdot \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^3\ 2^3 \begin{vmatrix} x_i & y_i & 0 & 1 \\ x_k & y_k & 0 & 1 \\ x_m & y_m & 0 & 1 \\ x_n & y_n & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i & x_k & x_m & x_n \\ y_i & y_k & y_m & y_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3\ 2^3 \begin{vmatrix} x_i & y_i & 0 & 1 \\ x_k & y_k & 0 & 1 \\ x_m & y_m & 0 & 1 \\ x_n & y_n & 0 & 1 \end{vmatrix}^2 \equiv 0.$$

Опираясь на этот пример, дадим предварительное определение феноменологической структуры ранга 4 на одном множестве.

§ 6. Предварительное определение феноменологической структуры ранга 4 на одном множестве размерности 2.

Рассмотрим одно множество $\mathfrak{M}_2 = \{i, k, \dots\}$ и отображение

$$q : \mathfrak{M}_2 \to \mathbb{R}^2 \qquad\qquad i \mapsto \xi(i), \eta(i)$$

Мы будем говорить, что на множестве $\mathfrak{M}_2$ размерности 2 определена **феноменологическая структура ранга 4**, если существует вещественная функция $2+2$ вещественных переменных

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$u, v; u', v' \mapsto \varphi(u, v; u', v')$$

такая, что шесть функций

$$\begin{array}{lll} \varphi(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) & \varphi(\xi_1, \eta_1; \xi_3, \eta_3) & \varphi(\xi_1, \eta_1; \xi_4, \eta_4) \\ & \varphi(\xi_2, \eta_2; \xi_3, \eta_3) & \varphi(\xi_2, \eta_2; \xi_4, \eta_4) \\ & & \varphi(\xi_3, \eta_3; \xi_4, \eta_4) \end{array}$$

где $\xi_1, \eta_1;\ \xi_2, \eta_2;\ \xi_3, \eta_3;\ \xi_4, \eta_4$ – восемь $2 \cdot 4$ независимых переменных, связаны между собой соотношением

$$\begin{array}{llll} \Psi(\varphi(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2), & \varphi(\xi_1, \eta_1; \xi_3, \eta_3), & \varphi(\xi_1, \eta_1; \xi_4, \eta_4), & \\ & \varphi(\xi_2, \eta_2; \xi_3, \eta_3), & \varphi(\xi_2, \eta_2; \xi_4, \eta_4), & \equiv 0, \\ & & \varphi(\xi_3, \eta_3; \xi_4, \eta_4)) & \end{array} \tag{7}$$

представляющим собой тождество относительно восьми независимых переменных $\xi_1, \eta_1;\ \xi_2, \eta_2;\ \xi_3, \eta_3;\ \xi_4, \eta_4$.

Задача состоит в том, чтобы найти две неизвестные функции

$$\varphi(u, v; u', v') \qquad \text{и} \qquad \begin{array}{lll} \Psi(\varphi_{12}, & \varphi_{13}, & \varphi_{14}, \\ & \varphi_{23}, & \varphi_{24}, \\ & & \varphi_{34}) \end{array},$$

обращающие равенство (7) в тождество.

Задача эта, несравненно более сложная, чем нахождение феноменологической структуры ранга 3, была решена двумя различными методами Г. Г. Михайличенко [3], [4] и В. Х. Львом [2]. Г. Г. Михайличенко первый доказал, что сакрально-функциональное уравнение (7) имеет только три (!) “естественных” решения и только четыре (!) “экзотических” независимых решения:

1. антисимметричное $\boxed{a_{ik} = -a_{ki}}$

$$\varphi_1(x_i, y_i; x_k, y_k) = a_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$$

$$\begin{array}{r}\Psi_1(a_{ik},\ \ a_{im},\ \ a_{in},\\ a_{km},\ \ a_{kn},\\ a_{mn})\end{array} = \begin{vmatrix} 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ -a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} \\ -a_{im} & -a_{km} & 0 & a_{mn} \\ -a_{in} & -a_{kn} & -a_{mn} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \overset{4}{K}{}^{00}_{ikmn;ikmn}(\overset{2}{a}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} & 0 \\ 0 & -a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} & 0 \\ 0 & -a_{im} & -a_{km} & 0 & a_{mn} & 0 \\ 0 & -a_{in} & -a_{kn} & -a_{mn} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \qquad (8)$$

$$= (a_{ik}a_{mn} - a_{im}a_{kn} + a_{in}a_{km})^2 \equiv 0$$

В том, что результат подстановки репрезентатора $a_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ в верификатор (8) тождественно равен нулю, можно убедиться непосредственно, рассмотрев очевидное тождество:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ -a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} \\ -a_{im} & -a_{km} & 0 & a_{mn} \\ -a_{in} & -a_{kn} & -a_{mn} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & -y_i & 0 & 0 \\ x_k & -y_k & 0 & 0 \\ x_m & -y_m & 0 & 0 \\ x_n & -y_n & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_i & y_k & y_m & y_n \\ x_i & x_k & x_m & x_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

2. симметричное (1) $\boxed{s_{ik} = s_{ki}; \quad s_{ii} = 0}$

$$\varphi_2(x_i, y_i; x_k, y_k) = s_{ik} = \varepsilon_1(x_i - x_k)^2 + \varepsilon_2(y_i - y_k)^2 \qquad \varepsilon = -1, 1$$

$$\begin{array}{r}\Psi_2(s_{ik},\ \ s_{im},\ \ s_{in},\\ s_{km},\ \ s_{kn},\\ s_{mn})\end{array} = \overset{3}{K}{}^{11}_{ikmn;ikmn}(s) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & s_{ik} & s_{im} & s_{in} \\ -1 & s_{ik} & 0 & s_{km} & s_{kn} \\ -1 & s_{im} & s_{km} & 0 & s_{mn} \\ -1 & s_{in} & s_{kn} & s_{mn} & 0 \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad (9)$$

В том, что результат подстановки репрезентатора $s_{ik} = \varepsilon_1(x_i - x_k)^2 + +\varepsilon_2(y_i - y_k)^2$ в верификатор (9) тождественно равен нулю, можно убедиться непосредственно, рассмотрев очевидное тождество:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & s_{ik} & s_{im} & s_{in} \\ -1 & s_{ik} & 0 & s_{km} & s_{kn} \\ -1 & s_{im} & s_{km} & 0 & s_{mn} \\ -1 & s_{in} & s_{kn} & s_{mn} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon_1 x_i & \varepsilon_2 y_i & 0 & \varepsilon_1 x_i^2 + \varepsilon_2 y_i^2 \\ -1 & \varepsilon_1 x_k & \varepsilon_2 y_k & 0 & \varepsilon_1 x_k^2 + \varepsilon_2 y_k^2 \\ -1 & \varepsilon_1 x_m & \varepsilon_2 y_m & 0 & \varepsilon_1 x_m^2 + \varepsilon_2 y_m^2 \\ -1 & \varepsilon_1 x_n & \varepsilon_2 y_n & 0 & \varepsilon_1 x_n^2 + \varepsilon_2 y_n^2 \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot\begin{vmatrix} 1 & -(\varepsilon_1 x_i^2+\varepsilon_2 y_i^2) & -(\varepsilon_1 x_k^2+\varepsilon_2 y_k^2) & -(\varepsilon_1 x_m^2+\varepsilon_2 y_m^2) & -(\varepsilon_1 x_n^2+\varepsilon_2 y_n^2) \\ 0 & -2x_i & -2x_k & -2x_m & -2x_n \\ 0 & -2y_i & -2y_k & -2y_m & -2y_n \\ 0 & -2\cdot 0 & -2\cdot 0 & -2\cdot 0 & -2\cdot 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \varepsilon_1\varepsilon_2(-2)^3 \begin{vmatrix} x_i & y_i & 0 & 1 \\ x_k & y_k & 0 & 1 \\ x_m & y_m & 0 & 1 \\ x_n & y_n & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i & x_k & x_m & x_n \\ y_i & y_k & y_m & y_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \varepsilon_1\varepsilon_2(-2)^3 \begin{vmatrix} x_i & x_k & x_m & x_n \\ y_i & y_k & y_m & y_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 \equiv 0$$

3. симметричное (2) $\boxed{\hat{s}_{ik} = \hat{s}_{ki}\,; \quad \hat{s}_{ii} = 1}$

$$\varphi_3(x_i, y_i; x_k, y_k) = \hat{s}_{ik} = \varepsilon_1\, x_i x_k + \varepsilon_2\, y_i y_k + \sqrt{1-\varepsilon_1\, x_i^2 - \varepsilon_2\, y_i^2}\;\sqrt{1-\varepsilon_1\, x_k^2 - \varepsilon_2\, y_k^2}$$

$$\Psi_3(\hat{s}_{ik}, \hat{s}_{im}, \hat{s}_{in}, \hat{s}_{km}, \hat{s}_{kn}, \hat{s}_{mn}) = \overset{4}{K}{}^{00}_{ikmn;ikmn}(\hat{s}) = \begin{vmatrix} 1 & \hat{s}_{ik} & \hat{s}_{im} & \hat{s}_{in} \\ \hat{s}_{ik} & 1 & \hat{s}_{km} & \hat{s}_{kn} \\ \hat{s}_{im} & \hat{s}_{km} & 1 & \hat{s}_{mn} \\ \hat{s}_{in} & \hat{s}_{kn} & \hat{s}_{mn} & 1 \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad (10)$$

В том, что результат подстановки репрезентатора

$$\hat{s}_{ik} = \varepsilon_1\, x_i x_k + \varepsilon_2\, y_i y_k + \sqrt{1-\varepsilon_1\, x_i^2 - \varepsilon_2\, y_i^2}\;\sqrt{1-\varepsilon_1\, x_k^2 - \varepsilon_2\, y_k^2}$$

в верификатор (10) тождественно равен нулю, можно убедиться непосредственно, рассмотрев очевидное тождество:

$$\begin{vmatrix} 1 & \hat{s}_{ik} & \hat{s}_{im} & \hat{s}_{in} \\ \hat{s}_{ik} & 1 & \hat{s}_{km} & \hat{s}_{kn} \\ \hat{s}_{im} & \hat{s}_{km} & 1 & \hat{s}_{mn} \\ \hat{s}_{in} & \hat{s}_{kn} & \hat{s}_{mn} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 x_i & \varepsilon_2 y_i & \sqrt{1-\varepsilon_1 x_i^2-\varepsilon_2 y_i^2} & 0 \\ \varepsilon_1 x_k & \varepsilon_2 y_k & \sqrt{1-\varepsilon_1 x_k^2-\varepsilon_2 y_k^2} & 0 \\ \varepsilon_1 x_m & \varepsilon_2 y_m & \sqrt{1-\varepsilon_1 x_m^2-\varepsilon_2 y_m^2} & 0 \\ \varepsilon_1 x_n & \varepsilon_2 y_n & \sqrt{1-\varepsilon_1 x_n^2-\varepsilon_2 y_n^2} & 0 \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} x_i & x_k & x_m & x_n \\ y_i & y_k & y_m & y_n \\ \sqrt{1-\varepsilon_1 x_i^2-\varepsilon_2 y_i^2} & \sqrt{1-\varepsilon_1 x_k^2-\varepsilon_2 y_k^2} & \sqrt{1-\varepsilon_1 x_m^2-\varepsilon_2 y_m^2} & \sqrt{1-\varepsilon_1 x_n^2-\varepsilon_2 y_n^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \varepsilon_1\varepsilon_2 \begin{vmatrix} \varepsilon_1 x_i & \varepsilon_2 y_i & \sqrt{1-\varepsilon_1 x_i^2-\varepsilon_2 y_i^2} & 0 \\ \varepsilon_1 x_k & \varepsilon_2 y_k & \sqrt{1-\varepsilon_1 x_k^2-\varepsilon_2 y_k^2} & 0 \\ \varepsilon_1 x_m & \varepsilon_2 y_m & \sqrt{1-\varepsilon_1 x_m^2-\varepsilon_2 y_m^2} & 0 \\ \varepsilon_1 x_n & \varepsilon_2 y_n & \sqrt{1-\varepsilon_1 x_n^2-\varepsilon_2 y_n^2} & 0 \end{vmatrix}^2$$

Особенность феноменологической структуры ранга 4 на одном множестве состоит в том, что наряду с тремя, приведенными выше “естественными” решениями, уравнение (7) допускает ещё четыре “экзотических” решения:

1^*
$$\boxed{a_{1;ik} = \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k}}$$

2^*
$$\boxed{a_{3;ik} = [(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2] e^{\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k}}}$$

где $\gamma > 0$ — произвольная постоянная;

3^*
$$\boxed{a_{4;ik} = [(x_i - x_k)^2 - (y_i - y_k)^2] e^{\gamma \operatorname{Arth} \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k}}}$$

где $\gamma > 0$; $\gamma \neq 2$ — произвольная постоянная.

4^*
$$\boxed{a_{2;ik} = (x_i - x_k)^2 e^{\gamma \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k}}}$$

где $\gamma > 0$ — произвольная постоянная;

По-видимому, верификаторы для всех "экзотических" решений в явном виде через элементарные функции не выражаются. Таким образом, чтобы убедиться в том, что приведённые выше четыре "экзотических" репрезентатора действительно являются решениями сакрально-функционального уравнения (7), необходимо подставить их выражения в якобиан

$$\frac{\partial(a_{ik}, a_{im}, a_{in}, a_{km}, a_{kn}, a_{mn})}{\partial(x_i, y_i, x_k, y_k, x_m, y_m, x_n, y_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i} & \frac{\partial a_{im}}{\partial x_i} & \frac{\partial a_{in}}{\partial x_i} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_i} & \frac{\partial a_{im}}{\partial y_i} & \frac{\partial a_{in}}{\partial y_i} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} & 0 & 0 & \frac{\partial a_{km}}{\partial x_k} & \frac{\partial a_{kn}}{\partial x_k} & 0 \\ \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_k} & 0 & 0 & \frac{\partial a_{km}}{\partial y_k} & \frac{\partial a_{kn}}{\partial y_k} & 0 \\ 0 & \frac{\partial a_{im}}{\partial x_m} & 0 & \frac{\partial a_{km}}{\partial x_m} & 0 & \frac{\partial a_{mn}}{\partial x_m} \\ 0 & \frac{\partial a_{im}}{\partial y_m} & 0 & \frac{\partial a_{km}}{\partial y_m} & 0 & \frac{\partial a_{mn}}{\partial y_m} \\ 0 & 0 & \frac{\partial a_{in}}{\partial x_n} & 0 & \frac{\partial a_{kn}}{\partial x_n} & \frac{\partial a_{mn}}{\partial x_n} \\ 0 & 0 & \frac{\partial a_{in}}{\partial y_n} & 0 & \frac{\partial a_{kn}}{\partial y_n} & \frac{\partial a_{mn}}{\partial y_n} \end{pmatrix} \quad (11)$$

и убедиться, что ранг этого якобиана равен пяти.

Итак, если в основание двумерной геометрии положить принцип **феноменологической симметрии ранга** 4, т. е. требование, чтобы шесть переменных (играющие роль "квазиметрик")

$$\begin{matrix} \varphi_{ik} & \varphi_{im} & \varphi_{in} \\ & \varphi_{km} & \varphi_{kn} \\ & & \varphi_{mn} \end{matrix},$$

относящееся к четырём произвольным точкам $i, k, m, n \in \mathfrak{M}_2$, были бы связаны между собой одним функциональным соотношением (7), то можно показать, что получается только три (!) "естественных" решения, из которых получаются хорошо известные геометрии:

1 — двумерная симплектическая геометрия;

2 и 3 — двумерные евклидова и псевдоевклидова геометрии;

4, 5 и 6 — двумерная геометрия Римана (сферическая геометрия постоянной положительной кривизны),

— геометрия на поверхности сферы вещественного радиуса в псевдоевклидовом трёхмерном пространстве,

— двумерная геометрия Лобачевского (гиперболическая геометрия постоянной отрицательной кривизны)

и только четыре (!) "экзотических" решения, из которых получаются четыре, неизвестные до сих пор, "экзотические" геометрии.

На примере евклидовой плоскости мы встречаемся с новым типом коллективных или сакральных (в данном случае – тетрарных) отношений между точками.

Тетрарные отношения наблюдаются, если рассматривать множество всех симплексов $\mathfrak{S}_4$, состоящих из произвольных четырёх точек, лежащих на одной евклидовой плоскости. Как и в случае прямой, между четырьмя точками плоскости существует любопытная связь: с одной стороны, точки i, k, m, n совершенно произвольны, а с другой — шесть значений квадратов расстояний ℓ_{ik}^2, ℓ_{im}^2, ℓ_{in}^2, ℓ_{km}^2, ℓ_{kn}^2, ℓ_{mn}^2 связаны между собой соотношением (7).

Рассматривая каждый симплекс $\mathfrak{S}_4$ как некоторый единый физический объект, мы можем сопоставить ему одну характеристическую точку в шестимерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^6$, если в качестве её шести координат выберем шесть значений ℓ_{ik}^2, ℓ_{im}^2, ℓ_{in}^2, ℓ_{km}^2, ℓ_{kn}^2, ℓ_{mn}^2.

Факт существования соотношения (7) означает, что характеристические точки, соответствующие различным симплексам $\mathfrak{S}_4$, располагаются в $\mathbb{R}^6$ не произвольно, а на некоторой пятимерной гиперповерхности, что и означает на геометрическом языке существование феноменологической структуры ранга 4 на евклидовой плоскости.

§ 7. Простейшие соотношения между расстояниями в трёхмерном евклидовом пространстве.

Пусть $\mathfrak{M}_3 = \{i_1, i_2, \ldots\}$ – множество точек, произвольно расположенных в трёхмерном евклидовом пространстве.

Рассмотрим произвольный симплекс

$$\mathfrak{S}_5 = \{i, k, m, n, p\} \subset \mathfrak{M}_3$$

и десять, соответствующих ему, расстояний

$$\begin{array}{cccc} \ell_{ik} & \ell_{im} & \ell_{in} & \ell_{ip} \\ & \ell_{km} & \ell_{kn} & \ell_{kp} \\ & & \ell_{mn} & \ell_{mp} \\ & & & \ell_{np} \end{array}$$

Рассматривая трёхмерное евклидово пространство как трёхмерную гиперповерхность в четырёхмерном евклидовом пространстве, можно утверждать, что объём V_{ikmnp} четырёхмерного симплекса $\mathfrak{S}_5 = \{i,k,m,n,p\}$, пять вершин которого $i,k,m,n,p \in \mathfrak{M}_3$ лежат на одной и той же трёхмерной гиперповерхности, равен нулю.

Воспользовавшись формулой для объёма четырёхмерного симплекса

$$V_{ikmnp} = \frac{1}{2^2 \cdot 4!}(\mathcal{K}_{ikmnp,ikmnp})^{1/2},$$

где

$$\mathcal{K}_{ikmnp,ikmnp}(\ell^2) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{in}^2 & \ell_{ip}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{kp}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mn}^2 & \ell_{mp}^2 \\ -1 & \ell_{in}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{mn}^2 & 0 & \ell_{np}^2 \\ -1 & \ell_{ip}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{mp}^2 & \ell_{np}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

пятиточечный определитель Кэли-Менгера, можно придать этому утверждению вид универсального соотношения, связывающего десять квадратов взаимных расстояний

$$\begin{array}{cccc} \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{in}^2 & \ell_{ip}^2 \\ & \ell_{km}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{kp}^2 \\ & & \ell_{mn}^2 & \ell_{mp}^2 \\ & & & \ell_{np}^2 \end{array}$$

произвольного симплекса $\mathfrak{S}_5 = \{i,k,m,n,p\}$ трёхмерного евклидова пространства:

$$\forall i,k,m,n,p \in \mathfrak{M}_3$$

$$\Psi\begin{pmatrix} \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{in}^2 & \ell_{ip}^2 \\ & \ell_{km}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{kp}^2 \\ & & \ell_{mn}^2 & \ell_{mp}^2 \\ & & & \ell_{np}^2 \end{pmatrix} = \mathcal{K}_{ikmnp,ikmnp} =$$

$$= (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 & \ell_{in}^2 & \ell_{ip}^2 \\ -1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{kp}^2 \\ -1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 & \ell_{mn}^2 & \ell_{mp}^2 \\ -1 & \ell_{in}^2 & \ell_{kn}^2 & \ell_{mn}^2 & 0 & \ell_{np}^2 \\ -1 & \ell_{ip}^2 & \ell_{kp}^2 & \ell_{mp}^2 & \ell_{np}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

§ 8. Предварительное определение феноменологической структуры ранга 5 на одном множестве размерности 3.

Рассмотрим одно множество

$$\mathfrak{M}_3 = \{i, k, \ldots\}$$

и отображение

$$\begin{gathered} q : \mathfrak{M}_3 \to \mathbb{R}^3 \\ i \mapsto \xi(i), \eta(i), \zeta(i). \end{gathered}$$

Мы будем говорить, что на множестве $\mathfrak{M}_3$ размерности 3 имеет место феноменологическая структура ранга 5, если существует вещественная функция $3+3$ вещественных переменных

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$u, v, w; u', v', w' \mapsto \varphi(u, v, w; u', v', w')$$

такая, что десять функций

$$\begin{array}{cccc} \varphi(1;2) & \varphi(1;3) & \varphi(1;4) & \varphi(1;5) \\ & \varphi(2;3) & \varphi(2;4) & \varphi(2;5) \\ & & \varphi(3;4) & \varphi(3;5) \\ & & & \varphi(4;5) \end{array},$$

где

$$1 = \xi_1, \eta_1, \zeta_1; \quad 2 = \xi_2, \eta_2, \zeta_2; \quad 3 = \xi_3, \eta_3, \zeta_3; \quad 4 = \xi_4, \eta_4, \zeta_4; \quad 5 = \xi_5, \eta_5, \zeta_5 \ -$$

пятнадцать $(3 \cdot 5)$ независимых переменных,

связаны между собой соотношением

$$\begin{array}{cccc} \Psi(\varphi(1;2), & \varphi(1;3), & \varphi(1;4), & \varphi(1;5), \\ & \varphi(2;3), & \varphi(2;4), & \varphi(2;5), \\ & & \varphi(3;4), & \varphi(3;5), \\ & & & \varphi(4;5)) \end{array} \equiv 0, \tag{12}$$

представляющим собой тождество относительно пятнадцати независимых переменных 1, 2, 3, 4, 5.

Задача состоит в том, чтобы найти две независимые функции

$$\varphi(u, v, w; u', v', w') \quad \text{и} \quad \begin{array}{cccc} \Psi(\varphi_{12}, & \varphi_{13}, & \varphi_{14}, & \varphi_{15}, \\ & \varphi_{23}, & \varphi_{24}, & \varphi_{25}, \\ & & \varphi_{34}, & \varphi_{35}, \\ & & & \varphi_{45}) \end{array},$$

обращающие равенство (12) в тождество.

Эта весьма сложная задача была решена В.Х.Львом в его диссертации “Трёхмерные и четырёхмерные пространства в теории физических структур” [1]. Он первый доказал, что функциональное уравнение (12) имеет только три (!) “естественных” решения и только три (!) “экзотических” независимых решения:

1. антисимметричное $\boxed{a_{ik} = -a_{ki}}$

$$a_1(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k, z_k) = a_{ik} = x_i y_k - x_k y_i + z_i - z_k$$

$$\begin{array}{l} \Psi_1(a_{ik}, \; a_{im}, \; a_{in}, \; a_{ip} \\ \qquad\qquad a_{km}, \; a_{kn}, \; a_{kp} \\ \qquad\qquad\qquad a_{mn} \; a_{mp} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{np}) \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} & a_{ip} \\ -1 & -a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} & a_{kp} \\ -1 & -a_{im} & -a_{km} & 0 & a_{mn} & a_{mp} \\ -1 & -a_{in} & -a_{kn} & -a_{mn} & 0 & a_{np} \\ -1 & -a_{ip} & -a_{kp} & -a_{mp} & -a_{np} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2. симметричное (1) $\boxed{\ell^2_{ik} = \ell^2_{ki}; \quad \ell^2_{ii} = 0}$

$$a_2(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k, z_k) = \ell^2_{ik} = \varepsilon_1 (x_i - x_k)^2 + \varepsilon_2 (y_i - y_k)^2 + \varepsilon_3 (z_i - z_k)^2;$$

где $\varepsilon_1, \; \varepsilon_2, \; \varepsilon_3 = \pm 1$

$$\begin{array}{l} \Psi_2(\ell^2_{ik}, \; \ell^2_{im}, \; \ell^2_{in}, \; \ell^2_{ip} \\ \qquad\qquad \ell^2_{km}, \; \ell^2_{kn}, \; \ell^2_{kp} \\ \qquad\qquad\qquad \ell^2_{mn} \; \ell^2_{mp} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ell^2_{np}) \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} & \ell^2_{in} & \ell^2_{ip} \\ -1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{km} & \ell^2_{kn} & \ell^2_{kp} \\ -1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 & \ell^2_{mn} & \ell^2_{mp} \\ -1 & \ell^2_{in} & \ell^2_{kn} & \ell^2_{mn} & 0 & \ell^2_{np} \\ -1 & \ell^2_{ip} & \ell^2_{kp} & \ell^2_{mp} & \ell^2_{np} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3. симметричное (2) $\boxed{\hat{s}_{ik} = \hat{s}_{ki}\,; \quad \hat{s}_{ii} = 1}$

$$a_3(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k z_k) = \hat{s}_{ik} = \sqrt{1 - \varepsilon_1 x_i^2 - \varepsilon_2 y_i^2 - \varepsilon_3 z_i^2} \cdot \sqrt{1 - \varepsilon_1 x_k^2 - \varepsilon_2 y_k^2 - \varepsilon_3 z_k^2} +$$

$$+ \varepsilon_1 x_i x_k + \varepsilon_2 y_i y_k + \varepsilon_3 z_i z_k,$$

где $\varepsilon_1, \; \varepsilon_2, \; \varepsilon_3 = \pm 1$

$$\begin{array}{l} \Psi_3(\hat{s}_{ik}, \; \hat{s}_{im}, \; \hat{s}_{in}, \; \hat{s}_{ip} \\ \qquad\qquad \hat{s}_{km}, \; \hat{s}_{kn}, \; \hat{s}_{kp} \\ \qquad\qquad\qquad \hat{s}_{mn} \; \hat{s}_{mp} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \hat{s}_{np}) \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & \hat{s}_{ik} & \hat{s}_{im} & \hat{s}_{in} & \hat{s}_{ip} \\ \hat{s}_{ik} & 1 & \hat{s}_{km} & \hat{s}_{kn} & \hat{s}_{kp} \\ \hat{s}_{im} & \hat{s}_{km} & 1 & \hat{s}_{mn} & \hat{s}_{mp} \\ \hat{s}_{in} & \hat{s}_{kn} & \hat{s}_{mn} & 1 & \hat{s}_{np} \\ \hat{s}_{ip} & \hat{s}_{kp} & \hat{s}_{mp} & \hat{s}_{np} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

и ещё три “экзотических” решения:

$$a_4(x_i,y_i,z_i;x_k,y_kz_k)=\left\{\ln\left[(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2\right]+\gamma\mathrm{arctg}\frac{y_i-y_k}{x_i-x_k}\right\}z_iz_k,$$
$$a_5(x_i,y_i,z_i;x_k,y_kz_k)=\left\{\ln\left[(x_i-x_k)^2-(y_i-y_k)^2\right]+\gamma\mathrm{Arth}\frac{y_i-y_k}{x_i-x_k}\right\}z_iz_k,$$
$$a_6(x_i,y_i,z_i;x_k,y_kz_k)=\ln(x_i-x_k)+\frac{y_i-y_k+z_ix_k-z_kx_i}{x_i-x_k}.$$

Функции $\Psi_{4,5,6}$ через элементарные функции не выражаются.

Итак, если в основание трёхмерной геометрии положить принцип **феноменологической симметрии ранга 5**, т. е. требование, чтобы десять переменных, (играющих роль “квазиметрик”)

$$\begin{matrix}\varphi_{ik} & \varphi_{im} & \varphi_{in} & \varphi_{ip}\\ & \varphi_{km} & \varphi_{kn} & \varphi_{kp}\\ & & \varphi_{mn} & \varphi_{mp}\\ & & & \varphi_{np}\end{matrix},$$

относящиеся к пяти произвольным точкам $i,k,m,n,p\in\mathfrak{M}_3$, были бы связаны между собой одним функциональным соотношением (12), то можно показать, что получается десять и только десять геометрий:

1 – евклидова геометрия,
2 – псевдоевклидова геометрия,
3 – трёхмерная геометрия Римана (сферическая геометрия постоянной положительной кривизны),
4 и 5 – геометрии на поверхности трёхмерной сферы, вложенные в четырёхмерные псевдоевклидовы пространства,
6 – трёхмерная геометрия Лобачевского, гиперболическая геометрия постоянной отрицательной кривизны,
7 – геометрия на трёхмерной плоскости, вложенной в четырёхмерное симплектическое пространство,
8, 9 и 10 – неизвестные ранее трёхмерные “экзотические” геометрии.

Как и в случае прямой или плоскости, между пятью точками трёхмерного евклидова пространства существует необычная связь: с одной стороны, точки i,k,m,n,p совершенно произвольны, а с другой – десять значений квадратов расстояний между ними связаны между собой соотношением (12).

Рассматривая каждый симплекс $\mathfrak{S}_5$ как некоторый единый физический объект, мы можем сопоставить ему одну характеристическую точку в десятимерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^{10}$, если в качестве её десяти координат выберем соответствующие расстояния или их квадраты. Факт существования соотношения (12) означает, что характеристические точки, соответствующие различным симплексам $\mathfrak{S}_5$, расположены в $\mathbb{R}^{10}$ не произвольно, а на некоторой девятимерной поверхности, что и означает существование феноменологической структуры ранга 5 на одном множестве $\mathfrak{M}_3$ размерности 3.

Рябина красная

II. Евклидова геометрия – невероятная.

§ 9. Феноменологические и сакральные геометрии.

До сих пор точка как, основное, исходное понятие в любой геометрии, рассматривалась как нечто неделимое, бесструктурное. То есть считается, говоря словами Евклида, что: “Точка есть то, что не имеет частей” [?].

Однако, одним из главных принципов, лежащих в основании теории физических структур, является **Принцип сакральной симметрии**, согласно которому каждый физический объект $\tilde{i}$ имеет в качестве своего идеального прообраза пару, состоящую из двух сопряжённых прообразов (субъэйдосов) $|i\rangle$ и $\langle i|$ (см. рис. 10)

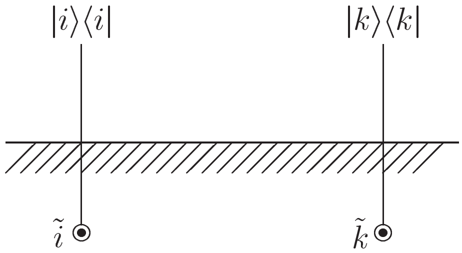


Рис. 10. Связь между физическими объектами и их идеальными прообразами.

Поскольку евклидову геометрию можно рассматривать как раздел физики, возникает желание переизложить её в соответствии с принципом сакральной симметрии. Прообразы (субъэйдосы) $|i\rangle$, $|k\rangle$ мы будем называть правыми (верхними) математическими объектами, а прообразы (субъэйдосы) $\langle i|$, $\langle k|$ – левыми (нижними) математическими объектами.

Итак, перенесём этот принцип на геометрию и будем рассматривать каждую точку i как своеобразный диполь, состоящий из двух слипшихся нижних (левых) и верхних (правых) математических объектов:

Точка в феноменологической геометрии

Точка в сакральной геометрии

В феноменологической геометрии исходным понятием является точка i ; в сакральной геометрии исходным понятием являются эйдосы – левые и правые математические объекты, а точка является производным понятием, представляющим собой пару, состоящую из левых и правых математических объектов:

$$i = |i\rangle\langle i|.$$

В феноменологической геометрии расстояние между двумя точками i и k симметрично, т. е.

$$\ell_{ik} = \ell_{ki}.$$

В сакральной геометрии, вообще говоря,

$$\ell_{\underline{i}\bar{k}} \neq \ell_{\underline{k}\bar{i}}.$$

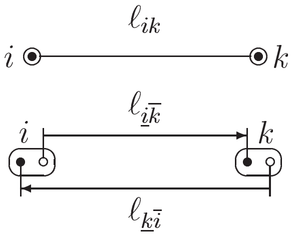


Рис. 11. Расстояние ℓ_{ik} в феноменологической геометрии и расстояния $\ell_{\underline{i}\bar{k}}$ и $\ell_{\underline{k}\bar{i}}$ в сакральной геометрии.

В основании n-мерной феноменологической геометрии лежит отношение между $n+2$ **точками**

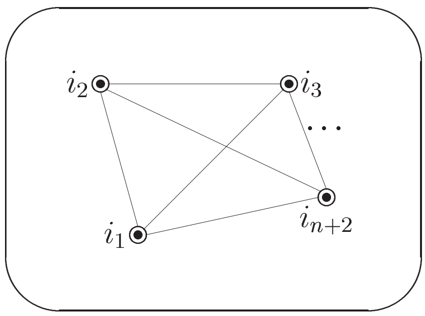


Рис. 12. Отношения между $n+2$ точками в n-мерной феноменологической геометрии.

В основании n-мерной сакральной геометрии лежит отношение между сакральными левыми $n+2$-кортами $\langle i_1 \dots i_{n+2}|$ рода и сакральными правыми $n+2$-кортами $|k_1 \dots k_{n+2}\rangle$:

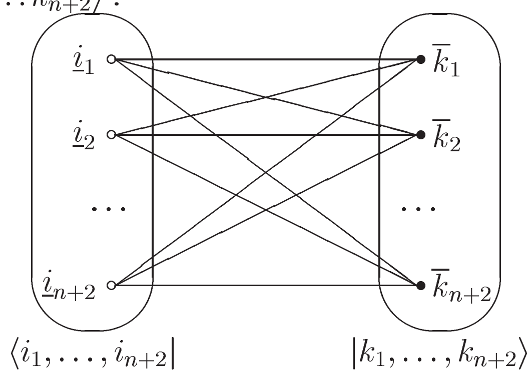


Рис. 13. Отношения между кортами в n-мерной сакральной геометрии.

§ 10. Одномерная сакральная геометрия.

Рассмотрим множество точек на прямой

$$\mathfrak{M}_1 = \{a_1, a_2, \ldots\}.$$

Разобъём его произвольным образом на два множества

$$\underline{\mathfrak{M}}_1 = \{\underline{i}_1, \underline{i}_2, \ldots\},$$

которое условно назовём множеством “белых” точек, и

$$\overline{\mathfrak{M}}_1 = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2, \ldots\},$$

которое условно назовём множеством “чёрных” точек.

Рассмотрим квадраты всевозможных расстояний

$$\overset{1}{\ell}{}^2_{\underline{i}\overline{k}} = (x_{\underline{i}} - x_{\overline{k}})^2$$

между “белыми” и “чёрными” точками.

Фундаментальный закон, лежащий в основании сакральной геометрии евклидовой прямой, состоит в следующем:

при любом выборе трёх “белых” точек, образующих левый 3-субъэйдосный корт $\langle \underline{i}_1\, \underline{i}_2\, \underline{i}_3|$, и при любом выборе трёх “чёрных” точек, образующих правый 3-субъэйдосный корт $|\overline{k}_1\, \overline{k}_2\, \overline{k}_3\rangle$, имеет место следующее тождество

$$\begin{array}{l}\Phi(\ell^{\,2}_{\underline{i}_1\overline{k}_1}, \ell^{\,2}_{\underline{i}_1\overline{k}_2}, \ell^{\,2}_{\underline{i}_1\overline{k}_3}, \\ \quad \ell^{\,2}_{\underline{i}_2\overline{k}_1}, \ell^{\,2}_{\underline{i}_2\overline{k}_2}, \ell^{\,2}_{\underline{i}_2\overline{k}_3}, \\ \quad \ell^{\,2}_{\underline{i}_3\overline{k}_1}, \ell^{\,2}_{\underline{i}_3\overline{k}_2}, \ell^{\,2}_{\underline{i}_3\overline{k}_3})\end{array} = \overset{2}{\mathcal{K}}{}^{11}_{i_1 i_2 i_3; k_1 k_2 k_3}(\overset{1}{\ell}{}^2) = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_3} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_3} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_3} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

В этом легко убедиться, рассмотрев следующее тождество

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_3} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_3} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_3} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & x_{i_1} & 0 & x_{i_1}^2 \\ -1 & x_{i_2} & 0 & x_{i_2}^2 \\ -1 & x_{i_3} & 0 & x_{i_3}^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -x_{k_1}^2 & -x_{k_2}^2 & -x_{k_3}^2 \\ 0 & -2x_{k_1} & -2x_{k_2} & -2x_{k_3} \\ 0 & -2\cdot 0 & -2\cdot 0 & -2\cdot 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^2 \cdot 2^2 \begin{vmatrix} x_{i_1} & 0 & 1 \\ x_{i_2} & 0 & 1 \\ x_{i_3} & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{k_1} & x_{k_2} & x_{k_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

§ 11. Двумерная сакральная геометрия.

Рассмотрим множество точек на плоскости

$$\mathfrak{M}_2 = \{a_1, a_2, \ldots\}.$$

Разобъём его произвольным образом на два множества:

$$\underline{\mathfrak{M}}_1 = \{\underline{i}_1, \underline{i}_2, \ldots\},$$

которое условно назовём множеством "белых" точек, и множество

$$\overline{\mathfrak{M}}_2 = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2, \ldots\},$$

которое условно назовём множеством "чёрных" точек.

Рассмотрим всевозможные квадраты расстояний

$$\overset{2}{\ell}{}^2_{\underline{i}\overline{k}} = (x_{\underline{i}} - x_{\overline{k}})^2 + (y_{\underline{i}} - y_{\overline{k}})^2$$

между "белыми" и "чёрными" точками.

Фундаментальный закон, лежащий в основании сакральной геометрии двумерной евклидовой плоскости, состоит в следующем:

при любом выборе четырёх "белых" точек, образующих левый 4-субъэйдосный корт $\langle \underline{i}_1\, \underline{i}_2\, \underline{i}_3\, \underline{i}_4|$ и при любом выборе четырёх "чёрных" точек, образующих правый 4-субъэйдосный корт $|\overline{k}_1\, \overline{k}_2\, \overline{k}_3\, \overline{K}_4\rangle$, имеет место следующее тождество:

$$\begin{array}{l}\Phi(\ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_1}, \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_2}, \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_3}, \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_4} \\ \quad \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_1}, \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_2}, \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_3}, \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_4} \\ \quad \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_1}, \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_2}, \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_3}, \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_4} \\ \quad \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_1}, \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_2}, \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_3}, \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_4})\end{array} = \overset{3}{\mathcal{K}}_{i_1 i_2 i_3 i_4; k_1 k_2 k_3 k_4}(\overset{2}{\ell}{}^2) =$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_3} & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_4} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_3} & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_4} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_3} & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_4} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_3} & \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_4} \end{vmatrix} \equiv 0$$

В этом легко убедиться, рассмотрев следующее тождество:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_3} & \ell^2_{\underline{i}_1\overline{k}_4} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_3} & \ell^2_{\underline{i}_2\overline{k}_4} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_3} & \ell^2_{\underline{i}_3\overline{k}_4} \\ -1 & \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_1} & \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_2} & \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_3} & \ell^2_{\underline{i}_4\overline{k}_4} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & x_{i_1} & y_{i_1} & 0 & r_{i_1}^2 \\ -1 & x_{i_2} & y_{i_2} & 0 & r_{i_2}^2 \\ -1 & x_{i_3} & y_{i_3} & 0 & r_{i_3}^2 \\ -1 & x_{i_4} & y_{i_4} & 0 & r_{i_4}^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -r_{k_1}^2 & -r_{k_2}^2 & -r_{k_3}^2 & -r_{k_4}^2 \\ 0 & -2x_{k_1} & -2x_{k_2} & -2x_{k_3} & -2x_{k_4} \\ 0 & -2y_{k_1} & -2y_{k_2} & -2y_{k_3} & -2y_{k_4} \\ 0 & -2\cdot 0 & -2\cdot 0 & -2\cdot 0 & -2\cdot 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^3 2^3 \begin{vmatrix} x_{i_1} & y_{i_1} & 0 & 1 \\ x_{i_2} & y_{i_2} & 0 & 1 \\ x_{i_3} & y_{i_3} & 0 & 1 \\ x_{i_4} & y_{i_4} & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{k_1} & x_{k_2} & x_{k_3} & x_{k_4} \\ y_{k_1} & y_{k_2} & y_{k_3} & y_{k_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

где $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$.

§ 12. Корт – фундаментальное понятие сакральной физики второго поколения.

Три понятия лежат в основании Теории физических структур. Это **корт**, **верификатор** и **репрезентатор.**

Корт играет роль Слова, из которого с помощью верификатора и репрезентатора формируется понятие *фундаментального физического закона.*

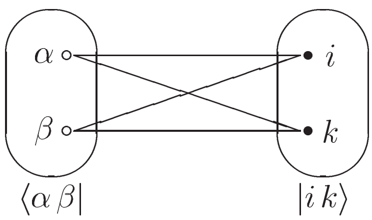
Оказывается, для этой цели нужно взять *конечное число* физических объектов и, рассматривая их как независимые нечисловые переменные, построить по определённому правилу некоторую **общезначимую формулу (тавтологию)**, подобно тому как это делается, например, в исчислении высказываний, в исчислении предикатов или в абстрактной алгебре Буля.

Далее на многочисленных примерах можно убедиться в том, что полученное таким образом "сакральное тождество" и есть фундаментальный закон, лежащий в основании физики и геометрии.

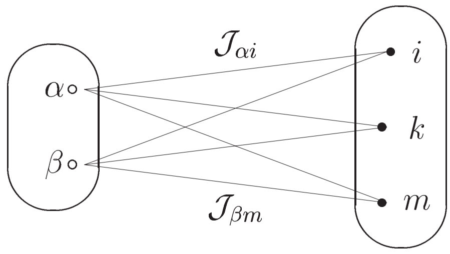
Итак, мы рассмотрели два физических закона – закон Ньютона и закон Ома – и два варианта евклидовой геометрии и установили следующее:

за всеми рассмотренными законами скрываются отношения между двумя соответствующими кортами :

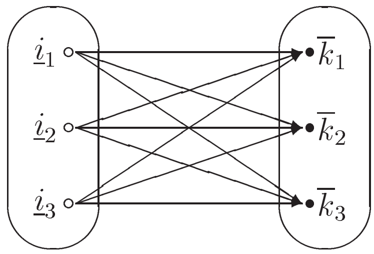
1. между левым кортом $\langle \alpha\,\beta\,|$, состоящим из двух акселераторов (ускорителей) α и β, и правым кортом $|\,i\,k\rangle$, состоящим из двух ускоряемых тел i и k, в случае закона Ньютона:



2. между левым кортом $\langle \alpha\,\beta\,|$, состоящим из двух источников тока α и β и правым кортом $|\,i\,k\,m\rangle$, состоящим из трёх проводников i, k и m в случае закона Ома для всей цепи:

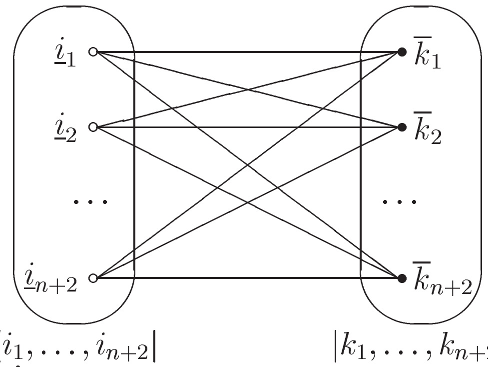


3. между левым кортом $\langle \underline{i_1}\ \underline{i_2}\ \underline{i_3}\,|$, состоящим из трёх “белых” точек, и правым кортом $|\,\overline{k_1}\ \overline{k_2}\ \overline{k_3}\,\rangle$, состоящим из трёх “чёрных” точек, в случае одномерной сакральной евклидовой геометрии:



$\langle \underline{i}_1\,\underline{i}_2\,\underline{i}_3\,|$ $\quad |\overline{k}_1\,\overline{k}_2\,\overline{k}_3\,\rangle$

4. между левым кортом $\langle \underline{i}_1\ \underline{i}_2\ \ldots\ \underline{i}_{n+2}\,|$, состоящим из $n+2$ “белых” точек, и правым кортом $|\,\overline{k}_1\ \overline{k}_2\ \ldots\ \overline{k}_{n+2}\,\rangle$, состоящим из $n+2$ “чёрных” точек, в случае n -мерной сакральной евклидовой геометрии:



$\langle \underset{\cdot}{i_1}, \ldots, i_{n+2}|$ $\quad |k_1, \ldots, k_{n+2}\rangle$

Как мы увидим в дальнейшем, идея **отношений между кортами** является важнейшей для всей физики и геометрии, так как составляет **сущность** самого́ понятия закона. Можно сказать, что суть каждого закона физики и геометрии состоит в отношении между двумя **сакральными кортами**.

При этом мне вспоминается моя единственная встреча с академиком Владимиром Александровичем Фоком (1898–1974), к которому я приехал в 1970 году в Ленинград, чтобы рассказать ему о своих работах по Теории физических структур и, в частности, о новой точке зрения на закон Ньютона $ma = f$.

Он встретил меня весьма доброжелательно, пригласил к себе домой и приготовился внимательно выслушать меня. Но когда я сказал:

— Рассмотрим два тела, i и k, и две пружинки, α и β, и измерим четыре ускорения $a_{\alpha i}$, $a_{\alpha k}$, $a_{\beta i}$, $a_{\beta k}$ ...

Здесь он перебил меня:

— Простите, о чём идёт речь? о механике материальной точки? или о механике системы, состоящей из двух материальных точек?

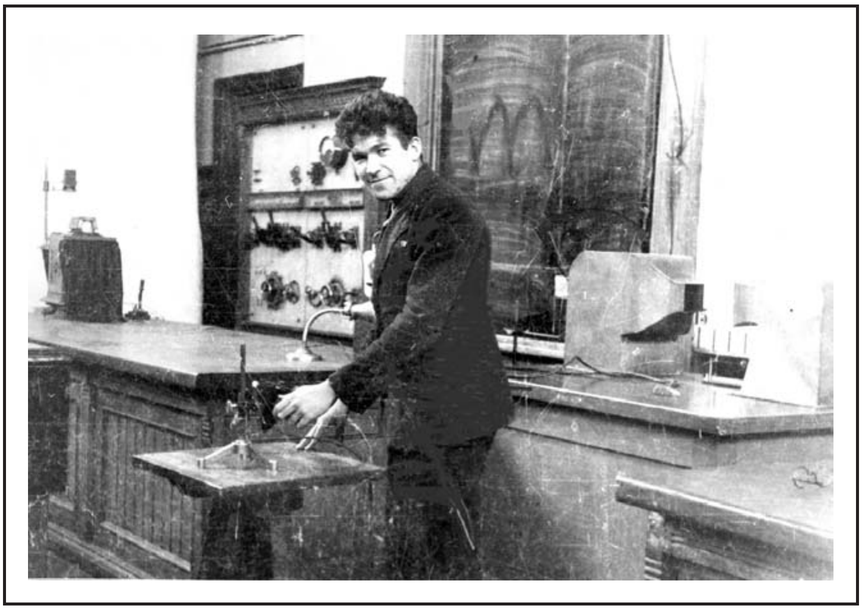
Я ответил:

— Речь идёт о механике материальной точки, то есть о новой точке зрения на закон Ньютона $ma = f$.

— Но, почему же Вы рассматриваете два тела? Нет, я Вас не понимаю!
и выключил свой слуховой аппарат, дав понять тем самым, что дальнейший разговор на эту тему лишён для него всякого смысла.

Действительно, очень трудно взглянуть на хорошо известную ещё с детства механику с существенно иной, непривычной точки зрения.

Кстати, должен заметить, что мой друг и давний коллега, профессор МГУ Юрий Сергеевич Владимиров в своих работах по "реляционной теории пространства-времени и взаимодействий" [5]–[6] по-своему переизлагает Теорию физических структур, (вводя, между прочим, свою неудачную терминологию), не как теорию отношений между кортами, а как теорию отношений между отдельными элементами, тем самым "выплёскивая из ванны самого ребёнка", что в значительной степени обесценивает эвристическое содержание Теории физических структур.



Юрий КУЛАКОВ *в Большой физической аудитории в старом здании МГУ на Моховой (1946 год)*

Литература к главе 7

[1] *Лев В.Х.* Трёхмерные и четырёхмерные пространства в теории физических структур. Кандидатская диссертация.

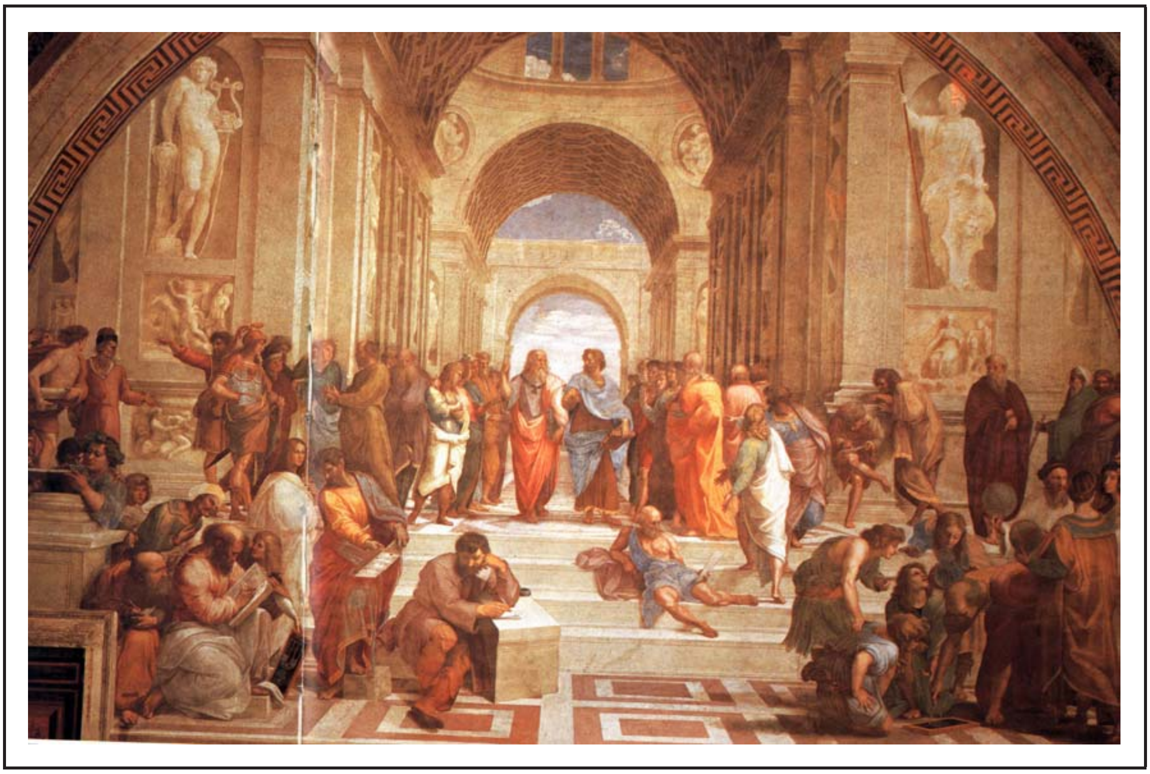
[2] *Лев В. Х.* Трёхмерные геометрии в теории физических структур // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. Выпуск 125. Вычислительные системы. Новосибирск. Институт математики СОАН СССР. 1988. с. 90–103.

[3] *Михайличенко Г. Г.* Двумерные геометрии // Доклады АН СССР 1981. т. 260. №4. с. 803–805.

[4] *Mikhaylichenko G.G.* Geométries a deux dimensions dans la théorie de structures physiques. C.R. Acad. Sc. Paris. t. 293 (16 november 1981) Serie 1. pp. 529–531.

[5] *Владимиров Ю.С.* Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. (Теория систем отношений). – М.: Изд-во МГУ, 1996.

[6] *Владимиров Ю.С.* Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 2. (Теория физических взаимодействий). – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 448 с.



Санти Рафаэль (1483 – 1520) *Афинская школа*

В центре:

Платон: – **Истинное знание имеет сакральное происхождение!**

Аристотель: – **Знание возникает из опыта и имеет антропное происхождение!**