Глава 10.

РАЗДЕЛЕНИЕ НЕЧИСЛОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Hereditas jacens[53]

Возможно, что самым замечательным является то, что при всей своей красоте и очевидной математической ценности преподавание теории определителей представляет настоящую проблему [1].

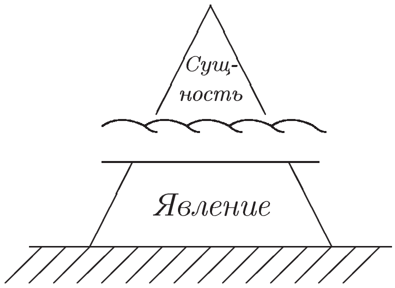
— *У.У. Сойер*

§ 1. Разделение нечисловых переменных в фундаментальных определителях.

§ 2. Ко- и контравариантные координатные определители.

§ 3. Разделение нечисловых переменных в фундаментальных определителях $\overset{N}{K}{}^{pq}(\overset{n}{\varphi}{}^{pq})$.

§ 4. Разделение нечисловых переменных в определителях Михайличенко.



[53]Лежачее наследство, то есть наследство, во владение которым не вступил никто из наследников.

Наша геометрия – это абстрактная геометрия. Наш разум может следовать за бестелесным духом, не связанным с идеей физической точки, так же как слепой от рождения человек может понять электромагнитную теорию света [2].

— *Х.Г.Фордер*

§ 1. Разделение нечисловых переменных в фундаментальных определителях.

Задача состоит в том, чтобы представить матрицы фундаментальных определителей

$$\overset{N}{K}{}^{pq}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+p};\,i_1\ldots i_N i_{N+q}}(\overset{n}{\varphi}{}^{pq}),$$

где $\quad p = 0, 1; \quad q = 0, 1;$

$$\overset{n}{\varphi}{}^{pq} = ps(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \ldots + \xi(\alpha)_n x^n(i) + q\sigma(\alpha)$$

в виде произведения двух координатных матриц $\Xi_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+p}}(\xi,\sigma)$ и $X_{i_1\ldots i_N i_{N+q}}(x, s)$, одна из которых зависит от переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_N, \alpha_{N+p}$, а другая – от переменных $i_1, \ldots, i_N, i_{N+q}$.

В качестве простейшего примера рассмотрим неокаймлённый определитель Грама

$$\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_n;\,i_1\ldots i_n}(\overset{n}{a}_{**}) = \begin{vmatrix} \overset{n}{a}_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\alpha_1 i_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \overset{n}{a}_{\alpha_n i_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\alpha_n i_n} \end{vmatrix}, \tag{1}$$

где $\quad \overset{n}{a}_{\alpha i} = \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \ldots + \xi(\alpha)_n x^n(i).$

Легко видеть, что матрица этого определителя может быть представлена в виде произведения следующих двух координатных матриц:

$$\begin{pmatrix} \overset{n}{a}_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\alpha_1 i_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \overset{n}{a}_{\alpha_n i_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\alpha_n i_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(\alpha_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1)_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi(\alpha_n)_1 & \ldots & \xi(\alpha_n)_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^1(i_1) & \ldots & x^1(i_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x^n(i_1) & \ldots & x^n(i_n) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, определитель Грама (1) может быть представлен в виде произведения двух координатных определителей

$$\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_n;\,i_1\ldots i_n}(\overset{n}{a}_{**}) = \begin{vmatrix} \overset{n}{a}_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\alpha_1 i_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \overset{n}{a}_{\alpha_n i_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\alpha_n i_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \xi(\alpha_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1)_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi(\alpha_n)_1 & \ldots & \xi(\alpha_n)_n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x^1(i_1) & \ldots & x^1(i_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x^n(i_1) & \ldots & x^n(i_n) \end{vmatrix}.$$

В качестве следующего примера рассмотрим дважды окаймлённый определитель

$$\overset{n}{A}{}^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1};\,i_1\ldots i_n i_{n+1}}(\overset{n}{w}_{**}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_{n+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_{n+1}} \\ -1 & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

где $\overset{n}{w}_{\alpha i} = s(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \ldots + \xi(\alpha)_n x^n(i) + \sigma(\alpha)$.

Матрица этого определителя также может быть представлена в виде произведения следующих двух координатных матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_{n+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_{n+1}} \\ -1 & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & \xi(\alpha_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1)_n & \sigma(\alpha_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \xi(\alpha_n)_1 & \ldots & \xi(\alpha_n)_n & \sigma(\alpha_n) \\ -1 & \xi(\alpha_{n+1})_1 & \ldots & \xi(\alpha_{n+1})_n & \sigma(\alpha_{n+1}) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & -s(i_1) & \ldots & -s(i_n) & -s(i_{n+1}) \\ 0 & x^1(i_1) & \ldots & x^1(i_n) & x^1(i_{n+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & x^n(i_1) & \ldots & x^n(i_n) & x^n(i_{n+1}) \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так что фундаментальный определитель (2) также может быть представлен в виде произведения двух координатных определителей

$$\overset{n}{A}{}^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1};i_1\ldots i_n i_{n+1}}(\overset{n}{w}_{**}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_{n+1}} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -1 & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_{n+1}} \\ -1 & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & \xi(\alpha_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1)_n & \sigma(\alpha_1) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -1 & \xi(\alpha_n)_1 & \ldots & \xi(\alpha_n)_n & \sigma(\alpha_n) \\ -1 & \xi(\alpha_{n+1})_1 & \ldots & \xi(\alpha_{n+1})_n & \sigma(\alpha_{n+1}) \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & -s(i_1) & \ldots & -s(i_n) & -s(i_{n+1}) \\ 0 & x^1(i_1) & \ldots & x^1(i_n) & x^1(i_{n+1}) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & x^n(i_1) & \ldots & x^n(i_n) & x^n(i_{n+1}) \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \xi(\alpha_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1)_n & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \xi(\alpha_n)_1 & \ldots & \xi(\alpha_n)_n & 1 \\ \xi(\alpha_{n+1})_1 & \ldots & \xi(\alpha_{n+1})_n & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x^1(i_1) & \ldots & x^1(i_n) & x^1(i_{n+1}) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x^n(i_1) & \ldots & x^n(i_n) & x^n(i_{n+1}) \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что дополнительные параметры $\sigma(\alpha)$ и $s(i)$, играющие роль “хвостов” в скалярном произведении $\overset{n}{w}_{\alpha i}$ и существенным образом входящие в координатные матрицы, никак не проявляют себя в соответствующих координатных определителях, что даёт основание называть их “скрытыми параметрами”.

Однако в принципе нельзя подобным образом разложить на множители фундаментальные определители

$$\overset{n}{A}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_n;i_1\ldots i_n i_{n+1}}(\overset{n}{u}) = \begin{vmatrix} \overset{n}{u}_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \overset{n}{u}_{\alpha_1 i_n} & \overset{n}{u}_{\alpha_1 i_{n+1}} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \overset{n}{u}_{\alpha_n i_1} & \cdots & \overset{n}{u}_{\alpha_n i_n} & \overset{n}{u}_{\alpha_n i_{n+1}} \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

где $\quad \overset{n}{u}_{\alpha i} = \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \ldots + \xi(\alpha)_n x^n(i) + \sigma(\alpha) \qquad$ и

$$\overset{n}{A}{}^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1};i_1\ldots i_n}(\overset{n}{v}) = \begin{vmatrix} \overset{n}{v}_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \overset{n}{v}_{\alpha_1 i_n} & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \overset{n}{v}_{\alpha_n i_1} & \cdots & \overset{n}{v}_{\alpha_n i_n} & 1 \\ \overset{n}{v}_{\alpha_{n+1} i_1} & \cdots & \overset{n}{v}_{\alpha_{n+1} i_n} & 1 \end{vmatrix},$$

$$\text{где} \qquad \overset{n}{v}_{\alpha i}= s(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \ldots + \xi(\alpha)_n x^n(i).$$

Однако разделение переменных можно легко осуществить во всех четырёх случаях, если от определителей $\overset{n}{A}{}^{00}, \overset{n}{A}{}^{01}, \overset{n}{A}{}^{10}, \overset{n}{A}{}^{11}$ перейти к эквивалентным дважды окаймлённым фундаментальным определителям $\overset{n}{K}{}^{00}, \overset{n}{K}{}^{01}, \overset{n}{K}{}^{10}, \overset{n}{K}{}^{11}$.

В самом деле, легко убедиться в существовании следующих четырёх матричных тождеств:

Матричное тождество 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \overset{n}{a}_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\alpha_1 i_n} & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \overset{n}{a}_{\alpha_n i_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{\alpha_n i_n} & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \xi(\alpha_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1)_n & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \xi(\alpha_n)_1 & \ldots & \xi(\alpha_n)_n & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x^1(i_1) & \ldots & x^1(i_n) & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & x^n(i_1) & \ldots & x^n(i_n) & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{где} \qquad \overset{n}{a}_{\alpha i} = \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \ldots + \xi(\alpha)_n x^n(i);$$

Матричное тождество 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & \overset{n}{u}_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \overset{n}{u}_{\alpha_1 i_n} & \overset{n}{u}_{\alpha_1 i_{n+1}} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \overset{n}{u}_{\alpha_n i_1} & \ldots & \overset{n}{u}_{\alpha_n i_n} & \overset{n}{u}_{\alpha_n i_{n+1}} \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \xi(\alpha_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1)_n & \sigma(\alpha_1) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \xi(\alpha_n)_1 & \ldots & \xi(\alpha_n)_n & \sigma(\alpha_n) \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x^1(i_1) & \ldots & x^1(i_n) & x^1(i_{n+1}) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & x^n(i_1) & \ldots & x^n(i_n) & x^n(i_{n+1}) \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{где} \qquad \overset{n}{u}_{\alpha i} = \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \ldots + \xi(\alpha)_n x^n(i) + \sigma(\alpha);$$

Матричное тождество 3:

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
-1 & \overset{n}{v}_{\alpha_1 i_1} & \dots & \overset{n}{v}_{\alpha_1 i_n} & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-1 & \overset{n}{v}_{\alpha_n i_1} & \dots & \overset{n}{v}_{\alpha_n i_n} & 0 \\
-1 & \overset{n}{v}_{\alpha_{n+1} i_1} & \dots & \overset{n}{v}_{\alpha_{n+1} i_n} & 0
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
-1 & \xi(\alpha_1)_1 & \dots & \xi(\alpha_1)_n & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-1 & \xi(\alpha_n)_1 & \dots & \xi(\alpha_n)_n & 0 \\
-1 & \xi(\alpha_{n+1})_1 & \dots & \xi(\alpha_{n+1})_n & 0
\end{pmatrix} \times
\begin{pmatrix}
1 & -s(i_1) & \dots & -s(i_n) & 0 \\
0 & x^1(i_1) & \dots & x^1(i_n) & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & x^n(i_1) & \dots & x^n(i_n) & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{pmatrix},
$$

где $\overset{n}{v}_{\alpha i} = s(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \ldots + \xi(\alpha)_n x^n(i)$;

Матричное тождество 4:

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
-1 & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_1} & \dots & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_1 i_{n+1}} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-1 & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_1} & \dots & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_n i_{n+1}} \\
-1 & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_1} & \dots & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_n} & \overset{n}{w}_{\alpha_{n+1} i_{n+1}}
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
-1 & \xi(\alpha_1)_1 & \dots & \xi(\alpha_1)_n & \sigma(\alpha_1) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-1 & \xi(\alpha_n)_1 & \dots & \xi(\alpha_n)_n & \sigma(\alpha_n) \\
-1 & \xi(\alpha_{n+1})_1 & \dots & \xi(\alpha_{n+1})_n & \sigma(\alpha_{n+1})
\end{pmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{pmatrix}
1 & -s(i_1) & \dots & -s(i_n) & -s(i_{n+1}) \\
0 & x^1(i_1) & \dots & x^1(i_n) & x^1(i_{n+1}) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & x^n(i_1) & \dots & x^n(i_n) & x^n(i_{n+1}) \\
0 & 1 & \dots & 1 & 1
\end{pmatrix}.
$$

где $\overset{n}{w}_{\alpha i} = s(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \ldots + \xi(\alpha)_n x^n(i) + \sigma(\alpha)$.

Все эти четыре тождества можно записать в виде одной формулы, содержащей два целочисленных параметра: $p = 0,1$ и $q = 0,1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & q & \ldots & q & 1 \\ -p & \overset{n}{\varphi}_{\alpha_1 i_1} & \ldots & \overset{n}{\varphi}_{\alpha_1 i_n} & q\,\overset{n}{\varphi}_{\alpha_1 i_{n+1}} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -p & \overset{n}{\varphi}_{\alpha_n i_1} & \ldots & \overset{n}{\varphi}_{\alpha_n i_n} & q\,\overset{n}{\varphi}_{\alpha_n i_{n+1}} \\ -1 & p\,\overset{n}{\varphi}_{\alpha_{n+1} i_1} & \ldots & p\,\overset{n}{\varphi}_{\alpha_{n+1} i_n} & pq\,\overset{n}{\varphi}_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -p & \xi(\alpha_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1)_n & q\sigma(\alpha_1) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -p & \xi(\alpha_n)_1 & \ldots & \xi(\alpha_n)_n & q\sigma(\alpha_n) \\ -1 & p\xi(\alpha_{n+1})_1 & \ldots & p\xi(\alpha_{n+1})_n & pq\sigma(\alpha_{n+1}) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & -ps(i_1) & \ldots & -ps(i_n) & -pqs(i_{n+1}) \\ 0 & x^1(i_1) & \ldots & x^1(i_n) & qx^1(i_{n+1}) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & x^n(i_1) & \ldots & x^n(i_n) & qx^n(i_{n+1}) \\ 0 & q & \ldots & q & 1 \end{pmatrix}.$$

где $\quad \overset{n}{\varphi}{}^{pq}_{\alpha i} = ps(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \ldots + \xi(\alpha)_n x^n(i) + q\sigma(\alpha).$

§ 2. Ко- и контравариантные координатные определители.

Итак, каждый фундаментальный определитель $\overset{n}{K}{}^{pq}(\overset{n}{\varphi}{}^{pq})$ может быть представлен в виде произведения двух координатных $(pq)-$ и $(qp)-$ определителей:

1. Фундаментальный (00)-определитель.

$$\overset{n}{K}{}^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_n;\,i_1\ldots i_n}(\overset{n}{a}\,) = \overset{00}{\Xi}\,(\alpha_1\ldots\alpha_n) \cdot \overset{00}{X}\,(i_1\ldots i_n);$$

где $\quad \overset{00}{\Xi}\,(\alpha_1\ldots\alpha_n) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \xi(\alpha_1)_1 & \ldots & \xi(\alpha_1)_n & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \xi(\alpha_n)_1 & \ldots & \xi(\alpha_n)_n & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} -$

– ковариантный координатный (00)-определитель,

$$\overset{00}{X}(i_1 \dots i_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x^1(i_1) & \dots & x^1(i_n) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x^n(i_1) & \dots & x^n(i_n) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}; \;-$$

– контравариантный координатный (00)-определитель,

2. Фундаментальный (01)-определитель.

$$\overset{n}{K}{}^{01}_{\alpha_1 \dots \alpha_n; i_1 \dots i_n i_{n+1}}(\overset{n}{u}) = \overset{01}{\Xi}(\alpha_1 \dots \alpha_n) \cdot \overset{10}{X}(i_1 \dots i_n i_{n+1});$$

где $$\overset{01}{\Xi}(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \xi(\alpha_1)_1 & \dots & \xi(\alpha_1)_n & \sigma(\alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \xi(\alpha_n)_1 & \dots & \xi(\alpha_n)_n & \sigma(\alpha_n) \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \;-$$

– ковариантный координатный (01)-определитель,

$$\overset{10}{X}(i_1 \dots i_n i_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x^1(i_1) & \dots & x^1(i_n) & x^1(i_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x^n(i_1) & \dots & x^n(i_n) & x^n(i_{n+1}) \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \;-$$

– контравариантный координатный (10)-определитель,

3. Фундаментальный (10)-определитель.

$$\overset{n}{K}{}^{10}_{\alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1}; i_1 \dots i_n}(\overset{n}{v}) = \overset{10}{\Xi}(\alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1}) \cdot \overset{01}{X}(i_1 \dots i_n);$$

где $$\overset{10}{\Xi}(\alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & \xi(\alpha_1)_1 & \dots & \xi(\alpha_1)_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & \xi(\alpha_n)_1 & \dots & \xi(\alpha_n)_n & 0 \\ -1 & \xi(\alpha_{n+1})_1 & \dots & \xi(\alpha_{n+1})_n & 0 \end{vmatrix} \;-$$

– ковариантный координатный (10)-определитель,

$$\overset{01}{X}(i_1\dots i_n) = \begin{vmatrix} 1 & -s(i_1) & \dots & -s(i_n) & 0 \\ 0 & x^1(i_1) & \dots & x^1(i_n) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x^n(i_1) & \dots & x^n(i_n) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}; -$$

– контравариантный координатный (01)-определитель.

4. Фундаментальный (11)-определитель.

$$\overset{n}{K}{}^{11}_{\alpha_1\dots\alpha_n\alpha_{n+1};i_1\dots i_n i_{n+1}}(\overset{n}{w}) = \overset{11}{\Xi}(\alpha_1\dots\alpha_n\alpha_{n+1})\cdot\overset{11}{X}(i_1\dots i_n i_{n+1});$$

где $$\overset{11}{\Xi}(\alpha_1\dots\alpha_n\alpha_{n+1}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & \xi(\alpha_1)_1 & \dots & \xi(\alpha_1)_n & \sigma(\alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & \xi(\alpha_n)_1 & \dots & \xi(\alpha_n)_n & \sigma(\alpha_n) \\ -1 & \xi(\alpha_{n+1})_1 & \dots & \xi(\alpha_{n+1})_n & \sigma(\alpha_{n+1}) \end{vmatrix} -$$

– ковариантный координатный (11)-определитель,

$$\overset{11}{X}(i_1\dots i_n i_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & -s(i_1) & \dots & -s(i_n) & -s(i_{n+1}) \\ 0 & x^1(i_1) & \dots & x^1(i_n) & x^1(i_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x^n(i_1) & \dots & x^n(i_n) & x^n(i_{n+1}) \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} -$$

– контравариантный координатный (11)-определитель,

Все, приведённые выше, четыре координатных определителя можно записать в виде одной формулы, содержащей два целочисленных параметра: $p = 0,1$ и $q = 0,1$.

Фундаментальные (pq)-определители.

$$\overset{n}{K}{}^{pq}_{\alpha_1\dots\alpha_{n+p};i_1\dots i_{n+q}}(\overset{n}{w}) = \overset{pq}{\Xi}(\alpha_1\dots\alpha_{n+p})\cdot\overset{qp}{X}(i_1\dots i_{n+q}),$$

где $$\overset{pq}{\Xi}(\alpha_1\dots\alpha_{n+p}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -p & \xi(\alpha_1)_1 & \dots & \xi(\alpha_1)_n & q\sigma(\alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p & \xi(\alpha_n)_1 & \dots & \xi(\alpha_n)_n & q\sigma(\alpha_n) \\ -1 & p\xi(\alpha_{n+1})_1 & \dots & p\xi(\alpha_{n+1})_n & pq\sigma(\alpha_{n+1}) \end{vmatrix} -$$

– ковариантный координатный (pq)-определитель,

$$\overset{qp}{X}(i_1 \dots i_{n+q}) = \begin{vmatrix} 1 & -ps(i_1) & \dots & -ps(i_n) & -pqs(i_{n+1}) \\ 0 & x^1(i_1) & \dots & x^1(i_n) & qx^1(i_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x^n(i_1) & \dots & x^n(i_n) & qx^n(i_{n+1}) \\ 0 & q & \dots & q & 1 \end{vmatrix} -$$

– контравариантный координатный (qp)-определитель,

§ 3. Разделение нечисловых переменных в фундаментальных определителях $\overset{N}{K}{}^{pq}(\overset{n}{\varphi}{}^{pq})$.

В предыдущем параграфе мы убедились в том, что все фундаментальные определители вида $\overset{n}{K}{}^{pq}(\overset{n}{\varphi}{}^{pq})$ могут быть представлены в виде произведения двух координатных определителей $\overset{pq}{\Xi}(\alpha_1 \dots \alpha_{n+p})_{-p;\xi_1\dots\xi_n;q\sigma}$ и $\overset{qp}{X}(i_1 \dots i_{n+q})^{-ps;x^1\dots x^n;q}$.

Рассмотрим теперь фундаментальные определители вида $\overset{N}{K}{}^{pq}(\overset{n}{\varphi}{}^{pq})$, у которых $N \neq n$.

Но прежде рассмотрим три простейших примера:

$$\overset{2}{A}_{\alpha\beta;\,ik}(\overset{1}{a}) = \begin{vmatrix} \xi_\alpha x_i & \xi_\alpha x_k \\ \xi_\beta x_i & \xi_\beta x_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_\alpha & 0 \\ \xi_\beta & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

$$\overset{2}{A}_{\alpha\beta;\,ik}(\overset{2}{a}) = \begin{vmatrix} \xi_\alpha x_i + \eta_\alpha y_i & \xi_\alpha x_k + \eta_\alpha y_k \\ \xi_\beta x_i + \eta_\beta y_i & \xi_\beta x_k + \eta_\beta y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_\alpha & \eta_\alpha \\ \xi_\beta & \eta_\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix}$$

$$\overset{2}{A}_{\alpha\beta;\,ik}(\overset{3}{a}) = \begin{vmatrix} \xi_\alpha x_i + \eta_\alpha y_i + \zeta_\alpha z_i & \xi_\alpha x_k + \eta_\alpha y_k + \zeta_\alpha z_k \\ \xi_\beta x_i + \eta_\beta y_i + \zeta_\beta z_i & \xi_\beta x_k + \eta_\beta y_k + \zeta_\beta z_k \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_\alpha & \eta_\alpha \\ \xi_\beta & \eta_\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_\alpha & \zeta_\alpha \\ \xi_\beta & \zeta_\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ z_i & z_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \eta_\alpha & \zeta_\alpha \\ \eta_\beta & \zeta_\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_i & y_k \\ z_i & z_k \end{vmatrix}$$

Опираясь на эти примеры, привожу без доказательства следующие разложения:

$$\overset{N>n}{K}{}^{pq}_{\alpha_1\dots\alpha_{N+p};\,i_1\dots i_{N+q}}(\overset{n}{\varphi}) = \overset{pq}{\Xi}(\alpha_1 \dots \alpha_{N+p})_{-p;\,\xi_1 \dots \xi_n \underbrace{0 \dots 0}_{N-n};\,q\sigma} \cdot$$

$$\cdot \overset{qp}{X}(i_1 \dots i_{N+q})^{-ps;\,x^1 \dots x^n \underbrace{0 \dots 0}_{N-n};\,q} \equiv 0,$$

$$\overset{N=n}{K}{}^{pq}_{\alpha_1\dots\alpha_{n+p};\,i_1\dots i_{n+q}}(\overset{n}{\varphi}) = \overset{pq}{\Xi}(\alpha_1 \dots \alpha_{n+p})_{-p;\,\xi_1 \dots \xi_n;\,q\sigma} \cdot$$

$$\cdot \overset{qp}{X}(i_1 \dots i_{n+q})^{-ps;\,x^1;\dots x^n;\,q}$$

$$\overset{N<n}{K}{}^{pq}_{\alpha_1\ldots\alpha_{N+p};\, i_1\ldots i_{N+q}}(\overset{n}{\varphi}) = \sum_{1\leqslant\lambda_1<\ldots<\lambda_N\leqslant n} \overset{pq}{\Xi}(\alpha_1\ldots\alpha_{N+p})_{-p;\,\xi_{\lambda_1}\ldots\xi_{\lambda_N};\,q\sigma}\,\cdot$$

$$\cdot\, \overset{qp}{X}(i_1\ldots i_{N+q})^{-ps;\,x^{\lambda_1}\ldots x^{\lambda_N};\,q}\,.$$

где

1. координатные ко- и контравариантные определители, тождественно равные нулю, в случае $N > n$:

$$\overset{pq}{\Xi}(\alpha_1\ldots\alpha_{N+p})_{-p;\,\xi_1\ldots\xi_N\underbrace{0\ldots 0}_{N-n};\,q\sigma} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots\ 0 & 0\ldots 0 & 1 \\ -p & \xi(\alpha_1)_1 & \ldots\ \xi(\alpha_1)_N & 0\ldots 0 & q\sigma(\alpha_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -p & \xi(\alpha_N)_1 & \ldots\ \xi(\alpha_N)_n & 0\ldots 0 & q\sigma(\alpha_N) \\ -1 & p\xi(\alpha_{N+1})_1 & \ldots\ p\xi(\alpha_{N+1})_n & \underbrace{0\ldots 0}_{N-n} & pq\sigma(i_{N+1}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \xi(\alpha_1)_1 & \ldots\ \xi(\alpha_1)_N & 0\ldots 0 & p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi(\alpha_N)_1 & \ldots\ \xi(\alpha_N)_n & 0\ldots 0 & p \\ p\xi(\alpha_{N+1})_1 & \ldots\ p\xi(\alpha_{N+1})_n & \underbrace{0\ldots 0}_{N-n} & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

$$\overset{qp}{X}(i_1\ldots i_{N+q})^{-ps;\,x^1\ldots x^n\underbrace{0\ldots 0}_{N-n};\,q} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -ps(i_1) & \ldots & -ps(i_N) & -pqs(i_{N+1}) \\ 0 & x^1(i_1) & \ldots & x^1(i_N) & qx^1(i_{N+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & x^n(i_1) & \ldots & x^n(i_N) & qx^n(i_{N+1}) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & q & \ldots & q & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} N-n \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x^1(i_1) & \dots & x^1(i_N) & qx^1(i_{N+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n(i_1) & \dots & x^n(i_N) & qx^n(i_{N+1}) \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ q & \dots & q & 1 \end{vmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \dots\\ 0\end{matrix}}\right\}_{N-n} \equiv 0.$$

2. многокомпонентные ко- и контравариартные координатные определители в случае $N < n$ отличны от нуля и имеют следующий вид:

$$\overset{pq}{\Xi}(\alpha_1 \dots \alpha_{N+p})_{-p;\xi_{\lambda_1} \dots \xi_{\lambda_N};q\sigma} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -p & \xi(\alpha_1)_{\lambda_1} & \dots & \xi(\alpha_1)_{\lambda_N} & q\sigma(\alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p & \xi(\alpha_N)_{\lambda_1} & \dots & \xi(\alpha_N)_{\lambda_N} & q\sigma(\alpha_N) \\ -1 & p\xi(\alpha_{N+1})_{\lambda_1} & \dots & p\xi(\alpha_{N+1})_{\lambda_N} & pq\sigma(\alpha_{N+1}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \xi(\alpha_1)_{\lambda_1} & \dots & \xi(\alpha_1)_{\lambda_N} & p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi(\alpha_N)_{\lambda_1} & \dots & \xi(\alpha_N)_{\lambda_N} & p \\ p\xi(\alpha_{N+1})_{\lambda_1} & \dots & p\xi(\alpha_{N+1})_{\lambda_N} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{qp}{X}(i_1 \dots i_{N+q})\ {}^{-ps;x^{\lambda_1} \dots x^{\lambda_N};q} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -ps(i_1) & \dots & -ps(i_N) & -pqs(i_{N+1}) \\ 0 & x^{\lambda_1}(i_1) & \dots & x^{\lambda_1}(i_N) & qx^{\lambda_1}(i_{N+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x^{\lambda_N}(i_1) & \dots & x^{\lambda_N}(i_N) & qx^{\lambda_N}(i_{N+1}) \\ 0 & q & \dots & q & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x^{\lambda_1}(i_1) & \dots & x^{\lambda_1}(i_N) & qx^{\lambda_1}(i_{N+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{\lambda_N}(i_1) & \dots & x^{\lambda_N}(i_N) & qx^{\lambda_N}(i_{N+1}) \\ q & \dots & q & 1 \end{vmatrix}.$$

§ 4. Разделение нечисловых переменных в определителях Михайличенко.

Сначала покажем, что определитель

$$\overset{1}{K}{}^{02}_{\alpha;\,iab}(p_{**}) = \Gamma_{\alpha;\,i}(Q_{*;\,*ab}) = |Q_{\alpha;\,iab}|$$

может быть представлен в виде произведения двух определителей.

Так как

$$Q_{\alpha;\,iab} = \frac{p_{\alpha i} - p_{\alpha a}}{p_{\alpha i} - p_{\alpha b}},$$

где

$$p_{\alpha i} = \frac{\xi_\alpha x_i + \eta_\alpha}{x_i + \zeta_\alpha},$$

то

$$\boxed{Q_{\alpha;\,iab} = \zeta_\alpha(a\,b) \cdot x_i(a\,b),}$$

где

$$\zeta_\alpha(a\,b) = \frac{\zeta_\alpha + x_b}{\zeta_\alpha + x_a}$$

$$x_i(a\,b) = \frac{x_i - x_a}{x_i - x_b}.$$

Таким образом, легко доказывается следующее сакральное тождество:

$$\overset{2}{K}{}^{02}_{\alpha\beta;\,ikmn}(\varphi_{**}) = \frac{M_{\alpha\beta;ikmn}(\varphi_{**})}{Q_{\alpha;in}Q_{\alpha;kn}Q_{\beta;in}Q_{\beta;kn}} = \begin{vmatrix} Q_{\alpha;imn} & Q_{\alpha;kmn} \\ Q_{\beta;imn} & Q_{\beta;kmn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \zeta_\alpha(a\,b) & 0 \\ \zeta_\beta(a\,b) & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i(a\,b) & x_k(a\,b) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Аналогичным образом, легко показать, что определитель

$$\overset{1}{K}{}^{20}_{\alpha\mu\nu;\,i}(q_{**}) = \Gamma_{\alpha;\,i}(Q_{*\mu\nu;\,*}) = |Q_{\alpha\mu\nu;\,i}|$$

представляет собой произведение двух множителей.

Так как

$$Q_{\alpha\mu\nu;\,i} = \frac{q_{\alpha i} - q_{\mu i}}{q_{\alpha i} - q_{\nu i}},$$

где

$$q_{\alpha i} = \frac{\xi_\alpha x_i + y_i}{\xi_\alpha + z_i},$$

то

$$\boxed{Q_{\alpha\mu\nu;\,i} = \xi_\alpha(\mu\,\nu)\cdot z_i(\mu\,\nu),}$$

где

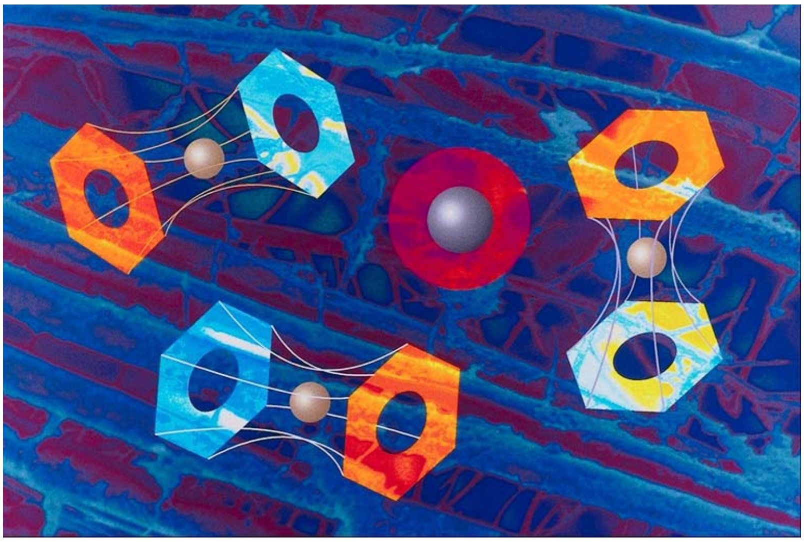
$$\xi_\alpha(\mu\,\nu) = \frac{\xi_\alpha - \xi_\mu}{\xi_\alpha - \xi_\nu}$$

$$z_i(\mu\,\nu) = \frac{z_i + \xi_\nu}{z_i + \xi_m u}.$$

Таким образом, имеем

$$\overset{2}{K}{}^{20}_{\alpha\beta\mu\nu;\,ik}(q_{**}) = \frac{M_{\alpha\beta\gamma\delta;ik}(\varphi_{**})}{Q_{\alpha\delta;i}Q_{\alpha\delta;k}Q_{\beta\delta;i}Q_{\beta\delta;k}} = \begin{vmatrix} Q_{\alpha\mu\nu;\,i} & Q_{\alpha\mu\nu;\,k} \\ Q_{\beta\mu\nu;\,i} & Q_{\beta\mu\nu;\,k} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_\alpha(\mu\,\nu) & 0 \\ \xi_\beta(\mu\,\nu) & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_i(\mu\,\nu) & z_k(\mu\,\nu) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$



Разделение нечисловых переменных

Литература к главе 10

[1]. *Сойер У.У.* Прелюдия к математике. - М.: Просвещение. 1965. - С. 199.

[2]. *Forder H.G.*, The Foundations of Eucliden Geometry, Cambridge – London, 1927, N.Y., 1956, p. 43.

Цитируется по книге *Кокстер Г.С.М.*, Введение в геометрию, “Наука”, – М:, 1966, С. 369.