Часть III

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

DIFFICILE EST PROPRIE COMMUNIA DICERE [46]

Знание определителей необходимо почти в любой отрасли математики. Благодаря своему широкому и разнообразному применению они привлекают к себе внимание со стороны всех, кто занимается прикладной математикой; для чистых математиков они представляют интерес как функции с особенно простыми и замечательными свойствами. Значение их очевидно и они вполне заслуживают изучения [1].

— *У.У. Сойер*

Глава 8. Секстет[47] фундаментальных определителей на двух множествах различной природы.

Глава 9. Репрезентаторы как корни сакральных тождеств.

Глава 10. Разделение нечисловых переменных.

[46] Трудно по-своему выразить общеизвестные вещи.

[47] *Секстет* (лат. sextus – шестой) – музыкальное произведение для шести инструментов, каждому из которых предназначена особая партия.

Аннотация к Части III

В двух предыдущих Частях рассматривались примеры, взятые из геометрии и общей физики, в которых хорошо известные законы записывались в виде тождественного равенства нулю определителей следующих шести типов:

четырёх регулярных

$$\overset{n+1}{K}{}^{00}(\overset{n}{a}) \equiv 0,$$

$$\overset{n+1}{K}{}^{01}(\overset{n}{u}) \equiv 0, \qquad \overset{n+1}{K}{}^{10}(\overset{n}{v}) \equiv 0,$$

$$\overset{n+1}{K}{}^{11}(\overset{n}{w}) \equiv 0$$

и двух спорадических

$$\overset{2}{M}{}^{02}(\overset{1}{p}) \equiv 0, \qquad \overset{2}{M}{}^{20}(\overset{1}{q}) \equiv 0.$$

В этой Части мы сможем убедиться в том, что весь этот секстет определителей может быть получен из одного определителя

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha_1 i_1} & \ldots & a_{\alpha_1 i_n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{\alpha_n i_1} & \ldots & a_{\alpha_n i_n} \end{vmatrix}$$

путём замены двухиндексных переменных $a_{\alpha i}$ на трёх- и четырёхиндексные переменные

$$a_{\alpha i},$$

$$u_{\alpha,ik} = u_{\alpha i} - u_{\alpha k},$$

$$v_{\alpha\beta,i} = v_{\alpha i} - v_{\beta i},$$

$$w_{\alpha\beta,ik} = w_{\alpha,ik} - w_{\beta,ik} = w_{\alpha\beta,i} - w_{\alpha\beta,k} = w_{\alpha,i} - w_{\beta,i} - w_{\alpha,k} + w_{\beta,k},$$

$$p_{\alpha,ikm} = \frac{p_{\alpha,ik}}{p_{\alpha,im}} = \frac{p_{\alpha,i} - p_{\alpha,k}}{p_{\alpha,i} - p_{\alpha,m}}$$

$$q_{\alpha\beta\gamma,i} = \frac{q_{\alpha\beta,i}}{p_{\alpha\gamma,i}} = \frac{q_{\alpha,i} - q_{\beta,i}}{q_{\alpha,i} - q_{\gamma,i}},$$

получаемыми из двухиндексных переменных с помощью двух обратных(!) функций – вычитания и деления.

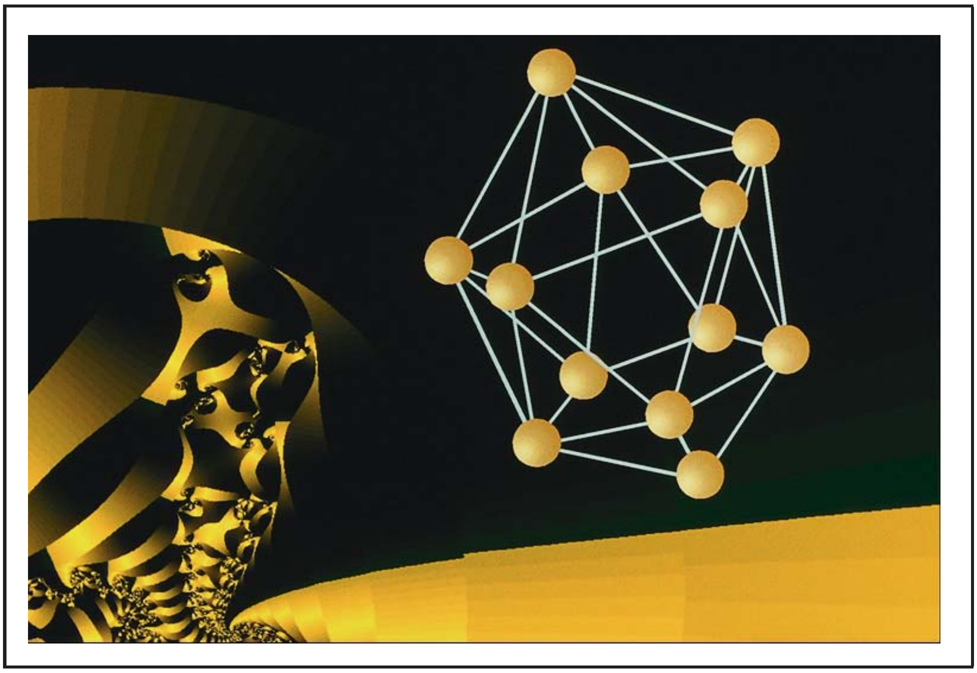
Этот факт интересен сам по себе, но он не отвечает на главные вопросы – почему законы физики и геометрии описываются рассмотренным выше синглетом определителей? почему определители играют такую большую роль в математике? и, наконец, что скрывается за понятием определителя?

Ответить на эти вопросы можно лишь опираясь как на фундамент на Теорию физических структур.

Математик, так же как художник или поэт, создаёт узоры. И если его узоры более устойчивы, то лишь потому, что они составлены из идей...

Узоры математика, так же как узоры художника или поэта должны быть прекрасны; идеи, так же как цвета или слова, должны гармонически соответствовать друг другу. Красота есть первое требование; в мире нет места для некрасивой математики.

Годфри Харольд Харди [2]



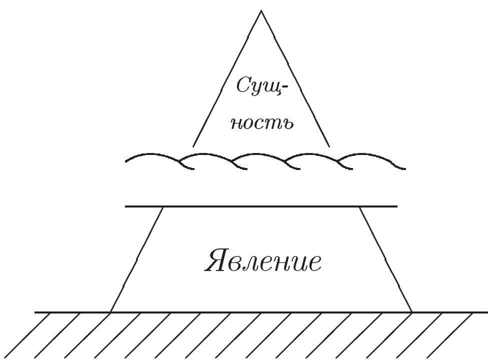
Глава 8.

Секстет фундаментальых определителей на двух множествах различной природы

Melius non incipient, quam desinent[48].

Мах был единственным кто серьёзно думал об исключении понятия пространства, которое он пытался заменить представлением о всей сумме расстояний между всеми материальными точками.

— Альберт Эйнштейн



[48]Лучше не начинать, чем остановиться на полпути.

Кэли сказал как-то в разговоре со мною, что в случае, если бы ему пришлось прочесть пятнадцать лекций по всей математике, то одну лекцию он посвятил бы определителям [3].

— *Феликс Клейн*

§ 1. Две различные точки зрения на определитель.

Обычно под определителем понимается специальная функция n^2 *двухиндексных переменных*:

$$A(a_{11},\ldots,a_{1n},\ldots,a_{n1},\ldots,a_{nn}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Однако, определитель можно рассматривать как функцию $2n$ *нечисловых переменных* $\boldsymbol{\alpha_1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_n}$ и $\boldsymbol{i_1}, \ldots, \boldsymbol{i_n}$, играющих роль индексов у числовых двухиндексных переменных $a_{\boldsymbol{\alpha i}}$:

$$A_{\,\boldsymbol{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\,;\,\boldsymbol{i_1 \ldots i_n}} = \begin{vmatrix} a_{\boldsymbol{\alpha_1 i_1}} & \cdots & a_{\boldsymbol{\alpha_1 i_n}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{\boldsymbol{\alpha_n i_1}} & \cdots & a_{\boldsymbol{\alpha_n i_n}} \end{vmatrix}.$$

На первый взгляд кажется странным – **определитель как функция индексов входящих в него числовых переменных!**

Однако, именно такая точка зрения на определитель делает его идеальным инструментом для описания физической реальности. Дело в том, что, как мы увидим в дальнейшем, любой физический закон – это вполне определенное утверждение относительно реальных физических объектов (точнее, относительно их идеальных прообразов – *субэйдосов*), имеющих нечисловую природу. Однако сам физический закон выражается через физические объекты не напрямую, а опосредованно через некоторую числовую функцию – *репрезентатор* $a_{\boldsymbol{\alpha i}}$, зависящую от двух, каждый раз различных, нечисловых переменных $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{i}$.

Так, например, Второй закон механики Ньютона в рамках Теории физических структур записывается в виде:

$$\forall\, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{N}; \qquad \forall\, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k} \in \mathfrak{M}$$

$$\Phi_{\boldsymbol{\alpha\beta};\,\boldsymbol{ik}} = \begin{vmatrix} a_{\boldsymbol{\alpha i}} & a_{\boldsymbol{\alpha k}} \\ a_{\boldsymbol{\beta i}} & a_{\boldsymbol{\beta k}} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

где $\mathfrak{N} = \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots\}$ – множество идеальных прообразов акселераторов,
$\mathfrak{M} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}, \ldots\}$ – множество идеальных прообразов ускоряемых тел;
$a_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{i}}$ – ускорение тела $\boldsymbol{i}$ под действием акселератора $\boldsymbol{\alpha}$.

Аналогично, закон Ома для всей цепи записывается в виде[49]:

$$\forall\, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{N}; \quad \forall\, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{m} \in \mathfrak{M}$$

$$\Phi_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta};\,\boldsymbol{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}} = \begin{vmatrix} \mathfrak{I}^{-1}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{i}} & \mathfrak{I}^{-1}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{k}} & \mathfrak{I}^{-1}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{m}} \\ \mathfrak{I}^{-1}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{i}} & \mathfrak{I}^{-1}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{k}} & \mathfrak{I}^{-1}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{m}} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

где $\mathfrak{N} = \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \ldots\}$ – множество идеальных прообразов источников тока,
$\mathfrak{M} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}, \ldots\}$ – множество идеальных прообразов проводников;
$\mathfrak{I}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{i}}$ – сила тока, проходящего через проводник $\boldsymbol{i}$ при подключении к нему источника тока $\boldsymbol{\alpha}$.

§ 2. Исходный определитель N-го порядка.

Прежде чем рассматривать физические и геометрические примеры, иллюстрирующие основную идею, лежащую в основании Теории физических структур, рассмотрим все виды определителей, которые будут встречаться нам в дальнейшем. Мы будем вводить их формальным путём, используя лишь хорошо известные свойства определителей.

Таким образом, в этом разделе, который имеет предварительный справочный характер, мы будем считать, что понятие определителя всем хорошо известно. Другое дело, когда в следующих разделах зайдёт речь о фундаментальных физических законах, то там мы начнём ab ovo, и само понятие определителя мы получим как единственно возможное решение некоторого чрезвычайно общего функционального уравнения.

Итак, мы будем исходить из хорошо известного определителя

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(\varphi) = \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} \end{vmatrix}$$

[49]Чтобы обратить внимание читателей на широкое использование в Теории физических структур *нечисловых физических переменных*, я использовал в этом параграфе “жирный” шрифт. Но в дальнейшем для обозначения нечисловых переменных я буду использовать нормальный шрифт.

§ 3. Фундаментальные двух-, трёх- и четырёхиндексные переменные.

Чтобы получить новые виды определителей как функции двухиндексных переменных, осуществим следующую замену переменных:

- *двухиндексные* переменные оставим без изменений:

$$Q_{*;*} = \varphi_{*;*}$$

- *трёхиндексные* переменные образуем как разности двухиндексных переменных:

$$Q_{*;*i} = \varphi_{*;*} - \varphi_{*;i}$$

$$Q_{*\alpha;*} = \varphi_{*;*} - \varphi_{\alpha;*}$$

- *четырёхиндексные* переменные образуем

либо как разности трёхиндексных переменных:

$$Q_{*\alpha;*i} = Q_{*;*i} - Q_{\alpha;*i} = Q_{*\alpha;*} - Q_{*\alpha;i} =$$

$$= \varphi_{*;*} - \varphi_{\alpha;*} - \varphi_{*;i} + \varphi_{\alpha;i}$$

либо как отношения трёхиндексных переменных:

$$Q_{*;*ik} = \frac{Q_{*;*i}}{Q_{*;**}} = \frac{\varphi_{*;*} - \varphi_{*;i}}{\varphi_{*;*} - \varphi_{*;k}}$$

$$Q_{*\alpha\beta;*} = \frac{Q_{*\alpha;*}}{Q_{*\beta;*}} = \frac{\varphi_{*;*} - \varphi_{\alpha;*}}{\varphi_{*;*} - \varphi_{\beta;*}}$$

§ 4. Шесть промежуточных определителей.

Подставляя полученные таким образом двух-, трёх- и четырёхиндексные переменные в исходный определитель, получим шесть следующих определителей:

1.
$$A^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(\varphi_{*;*}) = A_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(Q_{*;*}) =$$

$$= \begin{vmatrix} Q_{\alpha_1 i_1} & \cdots & Q_{\alpha_1 i_N} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_{\alpha_N i_1} & \cdots & Q_{\alpha_N i_N} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} \end{vmatrix}$$

2. $$A^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{*;*}) = A_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(Q_{*;*i_{N+1}}) =$$

$$= \begin{vmatrix} Q_{\alpha_1;i_1 i_{N+1}} & \cdots & Q_{\alpha_1;i_N i_{N+1}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ Q_{\alpha_N;i_1 i_{N+1}} & \cdots & Q_{\alpha_N;i_N i_{N+1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} - \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} - \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \varphi_{\alpha_N i_1} - \varphi_{\alpha_N i_{N+1}} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} - \varphi_{\alpha_N i_{N+1}} \end{vmatrix}$$

3. $$A^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N}(\varphi_{*;*}) = A_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(Q_{*\alpha_{N+1};*}) =$$

$$= \begin{vmatrix} Q_{\alpha_{N+1};i_1} & \cdots & Q_{\alpha_1\alpha_{N+1};i_N} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ Q_{\alpha_N\alpha_{N+1};i_1} & \cdots & Q_{\alpha_N\alpha_{N+1};i_N} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_N} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \varphi_{\alpha_N i_1} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_N} \end{vmatrix}$$

4. $$A^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{*;*}) = A_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(Q_{*\alpha_{N+1};*i_{N+1}}) =$$

$$= \begin{vmatrix} Q_{\alpha_1\alpha_{N+1};i_1 i_{N+1}} & \cdots & Q_{\alpha_1\alpha_{N+1};i_N i_{N+1}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ Q_{\alpha_N\alpha_{N+1};i_1 i_{N+1}} & \cdots & Q_{\alpha_N\alpha_{N+1};i_N i_{N+1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} - \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_1} + \varphi_{\alpha_{N+1} i_{N+1}} & \cdots \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ \varphi_{\alpha_N i_1} - \varphi_{\alpha_N i_{N+1}} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_1} + \varphi_{\alpha_{N+1} i_{N+1}} & \cdots \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} - \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_N} + \varphi_{\alpha_{N+1} i_{N+1}} \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} - \varphi_{\alpha_N i_{N+1}} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_N} + \varphi_{\alpha_{N+1} i_{N+1}} \end{matrix} \right|$$

5. $$A^{02}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N i_{N+1} i_{N+2}}(\varphi_{*;*}) = A_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(Q_{*;*i_{N+1}i_{N+2}}) =$$

$$= \begin{vmatrix} Q_{\alpha_1;i_1 i_{N+1} i_{N+2}} & \cdots & Q_{\alpha_1;i_N i_{N+1} i_{N+2}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ Q_{\alpha_N;i_1 i_{N+1} i_{N+2}} & \cdots & Q_{\alpha_N;i_N i_{N+1} i_{N+2}} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\varphi_{\alpha_1 i_1} - \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}}}{\varphi_{\alpha_1 i_1} - \varphi_{\alpha_1 i_{N+2}}} & \cdots & \dfrac{\varphi_{\alpha_1 i_N} - \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}}}{\varphi_{\alpha_1 i_N} - \varphi_{\alpha_1 i_{N+2}}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \dfrac{\varphi_{\alpha_N i_1} - \varphi_{\alpha_N i_{N+1}}}{\varphi_{\alpha_N i_1} - \varphi_{\alpha_N i_{N+2}}} & \cdots & \dfrac{\varphi_{\alpha_N i_N} - \varphi_{\alpha_N i_{N+1}}}{\varphi_{\alpha_N i_N} - \varphi_{\alpha_N i_{N+2}}} \end{vmatrix}$$

6. $$A^{20}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1}\alpha_{N+2};i_1\ldots i_N}(\varphi_{*;*}) = A_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(\varphi_{*\alpha_{N+1}\alpha_{N+2};*}) =$$

$$= \begin{vmatrix} Q_{\alpha_1\alpha_{N+1}\alpha_{N+2};i_1} & \cdots & Q_{\alpha_1\alpha_{N+1}\alpha_{N+2};i_N} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ Q_{\alpha_N\alpha_{N+1}\alpha_{N+2};i_1} & \cdots & Q_{\alpha_N\alpha_{N+1}\alpha_{N+2};i_N} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\varphi_{\alpha_1 i_1} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_1}}{\varphi_{\alpha_1 i_1} - \varphi_{\alpha_{N+2} i_1}} & \cdots & \dfrac{\varphi_{\alpha_1 i_N} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_N}}{\varphi_{\alpha_1 i_N} - \varphi_{\alpha_{N+2} i_N}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \dfrac{\varphi_{\alpha_N i_1} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_1}}{\varphi_{\alpha_N i_1} - \varphi_{\alpha_{N+2} i_1}} & \cdots & \dfrac{\varphi_{\alpha_N i_N} - \varphi_{\alpha_{N+1} i_N}}{\varphi_{\alpha_N i_N} - \varphi_{\alpha_{N+2} i_N}} \end{vmatrix}$$

Как мы увидим в дальнейшем, все полученные таким образом четыре определителя

$$A^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(\varphi_{*;*})$$
$$A^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{*;*})$$
$$A^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N}(\varphi_{*;*})$$
$$A^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{*;*})$$

естественным путём возникают сами собой в Теории физических структур.

Что же касается определителей

$$A^{02}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N i_{N+1} i_{N+2}}(\varphi_{*;*})$$

$$A^{20}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1}\alpha_{N+2};i_1\ldots i_N}(\varphi_{*;*}),$$

то из них востребованными оказываются лишь определители с $N=2$, то есть в Теории физических структур естественным путём получаются лишь определители

$$A^{02}_{\alpha\beta;ikmn}(\varphi_{*;*}) = A_{\alpha\beta;ik}(Q_{*;*mn}) =$$
$$= \begin{vmatrix} Q_{\alpha;imn} & Q_{\alpha;kmn} \\ \\ Q_{\beta;imn} & Q_{\beta;kmn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\varphi_{\alpha i}-\varphi_{\alpha m}}{\varphi_{\alpha i}-\varphi_{\alpha n}} & \dfrac{\varphi_{\alpha k}-\varphi_{\alpha m}}{\varphi_{\alpha k}-\varphi_{\alpha n}} \\ \\ \dfrac{\varphi_{\beta i}-\varphi_{\beta m}}{\varphi_{\beta i}-\varphi_{\beta n}} & \dfrac{\varphi_{\beta k}-\varphi_{\beta m}}{\varphi_{\beta k}-\varphi_{\beta n}} \end{vmatrix}$$

и

$$A^{20}_{\alpha\beta\gamma\delta;ik}(\varphi_{*;*}) = A_{\alpha\beta;ik}(Q_{*\gamma\delta;*}) =$$
$$= \begin{vmatrix} Q_{\alpha\gamma\delta;i} & Q_{\alpha\gamma\delta;k} \\ \\ Q_{\beta\gamma\delta;i} & Q_{\beta\gamma\delta;k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\varphi_{\alpha i}-\varphi_{\gamma i}}{\varphi_{\alpha i}-\varphi_{\delta i}} & \dfrac{\varphi_{\alpha k}-\varphi_{\gamma k}}{\varphi_{\alpha k}-\varphi_{\delta k}} \\ \\ \dfrac{\varphi_{\beta i}-\varphi_{\gamma i}}{\varphi_{\beta i}-\varphi_{\delta i}} & \dfrac{\varphi_{\beta k}-\varphi_{\gamma k}}{\varphi_{\beta k}-\varphi_{\delta k}} \end{vmatrix}$$

§ 5. Квартет[50] фундаментальных определителей и два определителя Михайличенко.

Итак, после соответствующего окаймления имеем квартет фундаментальных опеределителей:

1. фундаментальный 00−определитель

$$A^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(\varphi_{*;*}) = \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} \end{vmatrix}$$

2. фундаментальный 01−определитель

$$A^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{*;*}) = \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & \varphi_{\alpha_N i_{N+1}} \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

[50] *Квартет* (лат. quartus – четвёртый) – музыкальное произведение для четырёх инструментов, каждому из которых предназначена особая партия.

3. фундаментальный 10−определитель

$$A^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N}(\varphi_{*;*}) = \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & 1 \\ \varphi_{\alpha_{N+1} i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_{N+1} i_N} & 1 \end{vmatrix}$$

4. фундаментальный 11−определитель

$$A^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{*;*}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & \varphi_{\alpha_N i_{N+1}} \\ -1 & \varphi_{\alpha_{N+1} i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_{N+1} i_N} & \varphi_{\alpha_{N+1} i_{N+1}} \end{vmatrix}$$

и два определителя Михайличенко:

1. $$A^{02}_{\alpha\beta;ikmn}(\varphi_{*;*}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\varphi_{\alpha i} - \varphi_{\alpha m}}{\varphi_{\alpha i} - \varphi_{\alpha n}} & \dfrac{\varphi_{\alpha k} - \varphi_{\alpha m}}{\varphi_{\alpha k} - \varphi_{\alpha n}} \\ \\ \dfrac{\varphi_{\beta i} - \varphi_{\beta m}}{\varphi_{\beta i} - \varphi_{\beta n}} & \dfrac{\varphi_{\beta k} - \varphi_{\beta m}}{\varphi_{\beta k} - \varphi_{\beta n}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{Q_{\alpha;in}Q_{\alpha;kn}Q_{\beta;in}Q_{\beta;kn}} M_{\alpha\beta;ikmn}(\varphi_{*;*})$$

где

$$M_{\alpha\beta;ikmn}(\varphi_{**}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varphi_{\alpha i} & \varphi_{\alpha k} & \varphi_{\alpha m} & \varphi_{\alpha n} \\ \varphi_{\beta i} & \varphi_{\beta k} & \varphi_{\beta m} & \varphi_{\beta n} \\ \varphi_{\alpha i}\varphi_{\beta i} & \varphi_{\alpha k}\varphi_{\beta k} & \varphi_{\alpha m}\varphi_{\beta m} & \varphi_{\alpha n}\varphi_{\beta n} \end{vmatrix}$$

– первый определитнль Михайличенко

2. $$A^{20}_{\alpha\beta\gamma\delta;ik}(\varphi_{**}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\varphi_{\alpha i} - \varphi_{\gamma i}}{\varphi_{\alpha i} - \varphi_{\delta i}} & \dfrac{\varphi_{\alpha k} - \varphi_{\gamma k}}{\varphi_{\alpha k} - \varphi_{\delta k}} \\ \\ \dfrac{\varphi_{\beta i} - \varphi_{\gamma i}}{\varphi_{\beta i} - \varphi_{\delta i}} & \dfrac{\varphi_{\beta k} - \varphi_{\gamma k}}{\varphi_{\beta k} - \varphi_{\delta k}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{Q_{\alpha\delta;i}Q_{\alpha\delta;k}Q_{\beta\delta;i}Q_{\beta\delta;k}} M_{\alpha\beta\gamma\delta;ik}(\varphi_{*;*}),$$

где

$$M_{\alpha\beta\gamma\delta;ik}(\varphi_{*;*}) = \begin{vmatrix} 1 & \varphi_{\alpha i} & \varphi_{\alpha k} & \varphi_{\alpha i}\varphi_{\alpha k} \\ 1 & \varphi_{\beta i} & \varphi_{\beta k} & \varphi_{\beta i}\varphi_{\beta k} \\ 1 & \varphi_{\gamma i} & \varphi_{\gamma k} & \varphi_{\gamma i}\varphi_{\gamma k} \\ 1 & \varphi_{\delta i} & \varphi_{\delta k} & \varphi_{\delta i}\varphi_{\delta k} \end{vmatrix}$$

– второй определитель Михайличенко

§ 6. Квартет дважды окаймлённых фундаментальных определителей.

Полученные выше фундаментальные определители при фиксированном N имеют различный порядок. Чтобы обнаружить общие их свойства, необходимо путём соответствующего окаймления привести их к единообразному виду определителя $N+2$ порядка. Произведя такое окаймление мы получим квартет дважды окаймлённых фундаментальных определителей:

1. дважды окаймлённый фундаментальный $00-$определитель:

$$\overset{N}{K}{}^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(\varphi_{*;*}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. дважды окаймлённый фундаментальный $01-$определитель:

$$\overset{N}{K}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{*;*}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & \varphi_{\alpha_N i_{N+1}} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

3. дважды окаймлённый фундаментальный $10-$определитель:

$$\overset{N}{K}{}^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N}(\varphi_{*;*}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & 0 \\ -1 & \varphi_{\alpha_{N+1} i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_{N+1} i_N} & 0 \end{vmatrix}$$

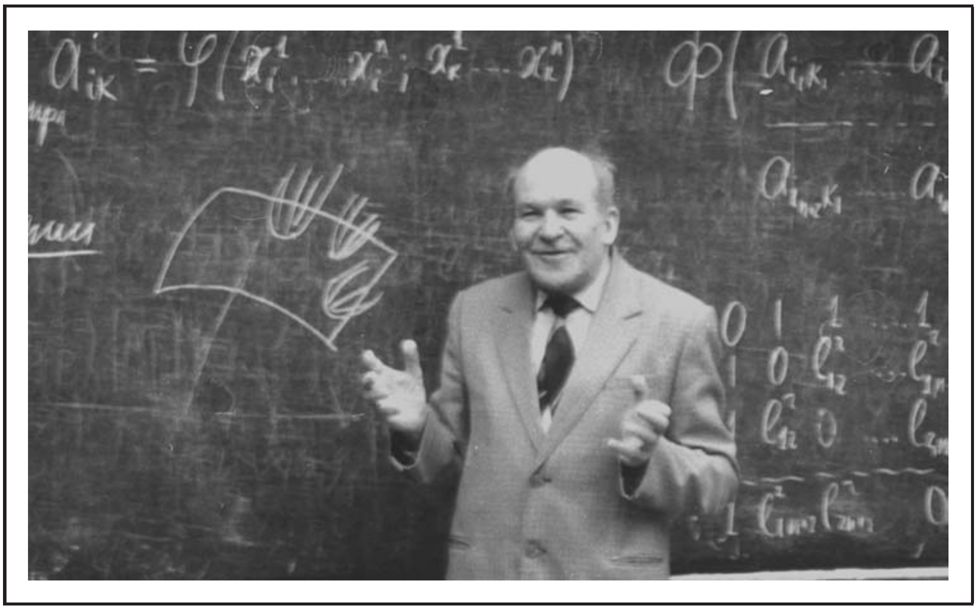
4. дважды окаймлённый фундаментальный $11-$определитель:

$$\overset{N}{K}{}^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{*;*}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & \varphi_{\alpha_N i_{N+1}} \\ -1 & \varphi_{\alpha_{N+1} i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_{N+1} i_N} & \varphi_{\alpha_{N+1} i_{N+1}} \end{vmatrix}$$

В итоге появляется возможность записать все четыре фундаментальных определителя в виде одной формулы, содержащей три параметра $N = 1, 2, \ldots$ $p = 0, 1;$ и $q = 0, 1:$

$$\overset{N}{K}{}^{pq}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N \alpha_{N+p}; i_1 \ldots i_N i_{N+q}}(\varphi_{*;*}) =$$

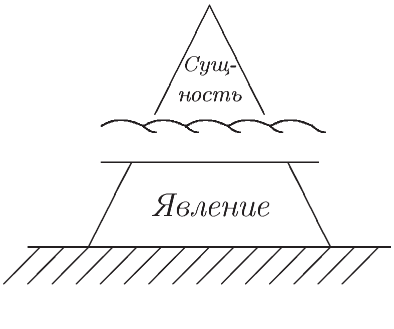
$$= \begin{vmatrix} 0 & q & \cdots & q & 1 \\ -p & \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & q\varphi_{\alpha_1 i_{N+q}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -p & \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & q\varphi_{\alpha_N i_{N+q}} \\ -1 & p\varphi_{\alpha_{N+p} i_1} & \cdots & p\varphi_{\alpha_{N+p} i_N} & pq\varphi_{\alpha_{N+p} i_{N+q}} \end{vmatrix}$$



Определитель – это просто!

Стоя́щие у основания ТФС:

Владимир Лев, Юрий Кулаков, Виктор Шахов и Геннадий Михайличенко



Литература к главе 8

[1] *Сойер У.У.* Прелюдия к математике - М.: Просвещение, 1965. - С. 199.

[2] *Hardy G.H.* A Mathematician's Apology, Cambridge – London, 1940, ss. 24, 25.

[3] *Клейн Феликс* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 2. Геометрия. - М.: Наука. 1987. С. 220.

Нобелевская медаль Игоря Евгеньевича Тамма