Глава 9.

РЕПРЕЗЕНТАТОРЫ КАК КОРНИ САКРАЛЬНЫХ ТОЖДЕСТВ

NULLIS IN VERBA[51]

Математика владеет не только истиной, но и высшей красотой – красотой холодной и суровой, подобной красоте скульптуры, не обращающейся ни к чему в нашей слабой натуре... Возвышенно чистая, способная к такому строгому совершенству, которое доступно только величайшему искусству [1].

— Бертран Рассел (1872 – 1970)

§ 1. Репрезентатор $a_{\alpha i}$ как корень фундаментального тождества $\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\alpha_1...\alpha_n\alpha_{n+1};i_1...i_ni_{n+1}}(a_{*;*}) \equiv 0$

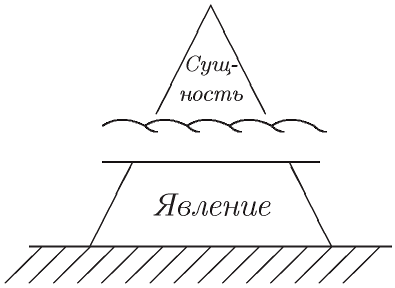
§ 2. Репрезентатор $u_{\alpha i}$ как корень фундаментального тождества $\overset{n+1}{K}{}^{01}_{\alpha_1...\alpha_n\alpha_{n+1};i_1...i_ni_{n+1}i_{n+2}}(u_{*;*}) \equiv 0$.

§ 3. Репрезентатор $v_{\alpha i}$ как корень фундаментального тождества $\overset{n+1}{K}{}^{10}_{\alpha_1...\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_{n+2};i_1...i_ni_{n+1}}(v_{*;*}) \equiv 0$.

§ 4. Репрезентатор $w_{\alpha i}$ как корень фундаментального тождества $\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\alpha_1...\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_{n+2};i_1...i_ni_{n+1}i_{n+2}}(w_{*;*}) \equiv 0.$

§ 5. Дробно-линейные репрезентаторы $p_{\alpha i}$ и $q_{\alpha i}$ как корни двух фундаментальных уравнений Михайличенко.

§ 6. Предварительные итоги



[51]Ничего на́ слово.

В наших примерах мы всегда создавали инварианты путём образования определителей; таким образом, вообще теория определителей всегда оказывается основой теории инвариантов. Такое положение дел побудило Кэли первоначально дать инвариантам название "сверхопределителей". Лишь позже Сильвестр ввёл слово "инвариант" [2].

— *Феликс Клейн*

Рассматривая фундаментальные определители

$$\overset{N}{K}{}^{pq}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+p};i_1\ldots i_N i_{N+q}}(\varphi_{*;*})$$

как функцию $(N+p)+(N+q)$ нечисловых переменных $\alpha_1,\ldots,\alpha_N,\alpha_{N+p}$ и $i_1,\ldots,i_N,i_{N+q}$ поставим следующую задачу:

Найти все корни (репрезентаторы) всех уравнений вида

$$\overset{N}{K}{}^{pq}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+p};i_1\ldots i_N i_{N+q}}(\varphi_{*;*})=0, \tag{1}$$

то есть найти такую опосредованную зависимость числовой функции $\varphi_{\alpha i}$ от двух нечисловых переменных α и i при которой равенство (1) обращается в тождественный нуль.

Введём новую целочисленную переменную $n=N-1$ $n=0,1,2,$ и рассмотрим все четыре варианта:

§ 1. Репрезентатор $a_{\alpha i}$ как корень фундаментального тождества $\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1};i_1\ldots i_n i_{n+1}}(a_{*;*})\equiv 0$.

В исходном тождестве

$$\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1};i_1\ldots i_n i_{n+1}}(a_{*;*})\equiv 0 \tag{2}$$

зафиксируем $2n$ нечисловых переменных и осуществим следующие переобозначения:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = \alpha & \qquad i_1 = i \\ \alpha_2 = \underline{1} & \qquad i_2 = \overline{1} \\ \alpha_3 = \underline{2} & \qquad i_3 = \overline{2} \\ \dots\dots & \qquad \dots\dots \\ \alpha_{n+1} = \underline{n} & \qquad i_{n+1} = \overline{n} \end{array}$$

См. рис. 1.

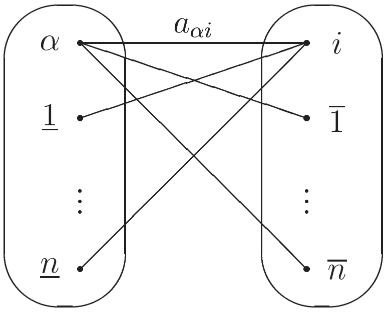


Рис. 1.

После этого уравнение (2) будет выглядеть следующим образом:

$$\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\alpha\underline{1}\ldots\underline{n};i\overline{1}\ldots\overline{n}}(a) = \begin{vmatrix} a_{\alpha i} & a_{\alpha\overline{1}} & \cdots & a_{\alpha\overline{n}} \\ a_{\underline{1}i} & a_{\underline{1}\,\overline{1}} & \cdots & a_{\underline{1}\,\overline{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\underline{n}i} & a_{\underline{n}\,\overline{1}} & \cdots & a_{\underline{n}\,\overline{n}} \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Разлагая определитель (3) по элементам первого столбца, будем иметь:

$$\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\alpha\underline{1}\ldots\underline{n};i\overline{1}\ldots\overline{n}}(a) = a_{\alpha i}\,\overset{n}{K}{}^{00}_{\underline{1}\ldots\underline{n};\overline{1}\ldots\overline{n}} - a_{\underline{1}i}\,\overset{n}{K}{}^{00}_{\alpha\underline{2}\ldots\underline{n};\overline{1}\ldots\overline{n}} - a_{\underline{2}i}\,\overset{n}{K}{}^{00}_{\underline{1}\alpha\underline{3}\ldots\underline{n};\overline{1}\ldots\overline{n}} - \ldots$$

$$\ldots - a_{\underline{n}i}\,\overset{n}{K}{}^{00}_{\underline{1}\ldots\underline{n+1}\alpha;\overline{1}\ldots\overline{n}} = 0.$$

Вводя следующие обозначения

$$\xi(\alpha)_r = \overset{n}{K}{}^{00}_{\underline{1}\ldots\underline{r-1}\alpha\underline{r+1}\ldots\underline{n};\overline{1}\ldots\overline{n}}\,; \qquad x^r(i) = \frac{a_{\underline{r}i}}{\overset{n}{K}{}^{00}_{\underline{1}\ldots\underline{n};\overline{1}\ldots\overline{n}}}$$

получим *обычное скалярное произведение*:

$$\boxed{a_{\alpha i} = \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \cdots + \xi(\alpha)_n x^n(i)}$$

Итак, нечисловые переменные α и i входят в равенство (2) и обращают его в тождественный нуль через произвольные числовые функции $\xi(\alpha)_r$ и $x^r(i)$, играющие роль декартовых ко- и контравариантных координат.

§ 2. Репрезентатор $u_{\alpha i}$ как корень фундаментального тождества $\overset{n+1}{K}{}^{01}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \alpha_{n+1}; i_1 \ldots i_n i_{n+1} i_{n+2}}(u_{*;*}) \equiv 0$.

В исходном тождестве

$$\overset{n+1}{K}{}^{01}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \alpha_{n+1}; i_1 \ldots i_n i_{n+1} i_{n+2}}(u_{*;*}) \equiv 0. \tag{4}$$

зафиксируем $n+n+1$ нечисловых переменных и осуществим следующие переобозначения:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 = \alpha & \qquad & i_1 = i \\ \alpha_2 = \underline{1} & & i_2 = \overline{1} \\ \alpha_3 = \underline{2} & & i_3 = \overline{2} \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ \alpha_{n+1} = \underline{n} & & i_{n+1} = \overline{n} \\ & & i_{n+2} = \overline{n+1} \end{array}$$

См. рис. 2.

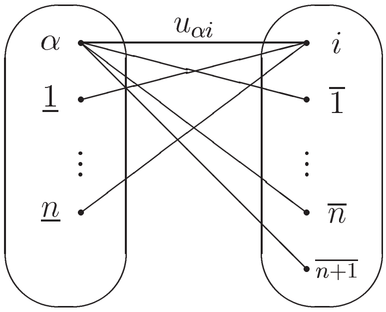


Рис. 2.

После этого уравнение (4) будет выглядеть следующим образом:

$$\overset{n+1}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{1}\ldots\underline{n}; i\overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}}(u) = \begin{vmatrix} u_{\alpha i} & u_{\alpha\overline{1}} & \cdots & u_{\alpha\overline{n}} & u_{\alpha\overline{n+1}} \\ u_{\underline{1}i} & u_{\underline{1}\,\overline{1}} & \cdots & u_{\underline{1}\,\overline{n}} & u_{\underline{1}\,\overline{n+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{\underline{n}i} & u_{\underline{n}\,\overline{1}} & \cdots & u_{\underline{n}\,\overline{n}} & u_{\underline{n}\,\overline{n+1}} \\ & & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

Разлагая определитель (2) по элементам первого столбца, будем иметь:

$$\overset{n+1}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{1}\ldots\underline{n}; i\overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}}(u) = u_{\alpha i}\,\overset{n}{K}{}^{01}_{\underline{1}\ldots\underline{n}; \overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}} - u_{\underline{1}i}\,\overset{n}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{2}\ldots\underline{n}; \overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}} -$$

$$-u_{\underline{2}i}\,\overset{n}{K}{}^{01}_{\underline{1}\alpha\underline{3}\ldots\underline{n}; \overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}} - \ldots - u_{\underline{n}i}\,\overset{n}{K}{}^{01}_{\underline{1}\ldots\underline{n-1}\alpha; \overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}} - \overset{n+1}{K}{}^{00}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\alpha; \overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}} = 0$$

Вводя следующие обозначения

$$\xi(\alpha)_r = \overset{n}{K}{}^{01}_{\underline{1}\ldots\underline{r-1}\alpha\underline{r+1}\ldots\underline{n}; \overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}}\ ; \qquad\qquad x^r(i) = \frac{u_{\underline{r}i}}{\overset{n}{K}{}^{01}_{\underline{1}\ldots\underline{n}; \overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}}}\ ;$$

$$\sigma(\alpha) = \frac{\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\alpha;\overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}}}{\overset{n}{K}{}^{01}_{\underline{1}\ldots\underline{n};\overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}}}$$

получим *скалярное произведение* $u_{\alpha i}$ *с одним правым хвостом* $\sigma(\alpha)$

$$\boxed{u_{\alpha i} = \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \cdots + \xi(\alpha)_n x^n(i) + \sigma(\alpha)}$$

§ 3. Репрезентатор $v_{\alpha i}$ как корень фундаментального тождества $\overset{n+1}{K}{}^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_{n+2};i_1\ldots i_n i_{n+1}}(v_{*;*}) \equiv 0$.

В исходном тождестве

$$\overset{n+1}{K}{}^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_{n+2};i_1\ldots i_n i_{n+1}}(v_{*;*}) \equiv 0 \tag{6}$$

зафиксируем $n+1+n$ нечисловых переменных и осуществим следующие переобозначения:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = \alpha & i_1 = i \\ \alpha_2 = \underline{1} & i_2 = \overline{1} \\ \alpha_3 = \underline{2} & i_3 = \overline{2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \alpha_{n+1} = \underline{n} & i_{n+1} = \overline{n} \\ \alpha_{n+2} = \underline{n+1} & \end{array}$$

См. рис. 3.

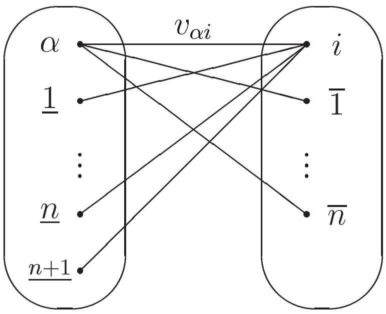


Рис. 3.

После этого уравнение (6) будет выглядеть следующим образом:

$$\overset{n+1}{K}{}^{10}_{\alpha\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};i\overline{1}\ldots\overline{n}}(v) = \begin{vmatrix} v_{\alpha i} & v_{\alpha\overline{1}} & \cdots & v_{\alpha\overline{n}} & 1 \\ v_{\underline{1}i} & v_{\underline{1}\,\overline{1}} & \cdots & v_{\underline{1}\,\overline{n}} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{\underline{n}i} & v_{\underline{n}\,\overline{1}} & \cdots & v_{\underline{n}\,\overline{n}} & 1 \\ v_{\underline{n+1}i} & v_{\underline{n+1}\,\overline{1}} & \cdots & v_{\underline{n+1}\,\overline{n}} & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

Разлагая определитель (7) по элементам первой строки, будем иметь:

$$\overset{n+1}{K}{}^{10}_{\alpha\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};i\overline{1}\ldots\overline{n}}(v) = v_{\alpha i}\ \overset{n}{K}{}^{10}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};\overline{1}\ldots\overline{n}} - v_{\alpha\overline{1}}\ \overset{n}{K}{}^{10}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};i\overline{1}\,\overline{2}\ldots\overline{n}} -$$

$$-v_{\alpha\overline{2}}\ \overset{n}{K}{}^{10}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};\overline{1}i\overline{3}\ldots\overline{n}} - \ldots - v_{\alpha\overline{n}}\ \overset{n}{K}{}^{10}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};\overline{1}\ldots\overline{n-1}i} - \overset{n+1}{K}{}^{00}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};i\overline{1}\ldots\overline{n}} = 0$$

Вводя следующие обозначения

$$\xi(\alpha)_r = \frac{v_{\alpha\overline{r}}}{\overset{n}{K}{}^{10}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};\overline{1}\ldots\overline{n}}}; \qquad x^r(i) = \overset{n}{K}{}^{10}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};\overline{1}\ldots\overline{r-1}i\overline{r+1}\ldots\overline{n}};$$

$$s(i) = \frac{\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};i\overline{1}\ldots\overline{n}}}{\overset{n}{K}{}^{10}_{\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};\overline{1}\ldots\overline{n}}}.$$

получим *скалярное произведение* $v_{\alpha i}$ *с одним левым хвостом* $s(i)$.

$$\boxed{v_{\alpha i} = s(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \cdots + \xi(\alpha)_n x^n(i)}$$

§ 4. Репрезентатор $w_{\alpha i}$ как корень фундаментального тождества $\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_{n+2};i_1\ldots i_n i_{n+1} i_{n+2}}(w_{*;*}) \equiv 0$.

В исходном тождестве

$$\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_{n+2};i_1\ldots i_n i_{n+1} i_{n+2}}(w_{*;*}) \equiv 0. \tag{8}$$

зафиксируем $2(n+1)$ нечисловых переменных и осуществим следующие переобозначения:

$$\begin{array}{ll}
\alpha_1 = \alpha & i_1 = i \\
\alpha_2 = \underline{1} & i_2 = \overline{1} \\
\alpha_3 = \underline{2} & i_3 = \overline{2} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\alpha_{n+1} = \underline{n} & i_{n+1} = \overline{n} \\
\alpha_{n+2} = \underline{n+1} & i_{n+2} = \overline{n+1}
\end{array}$$

См. рис. 4.

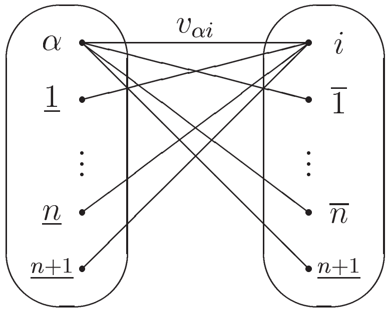


Рис. 4.

После этого уравнение (8) будет выглядеть следующим образом:

$$\overset{n+1}{K}_{\alpha\underline{1}\ldots\underline{n}\,\underline{n+1};i\overline{1}\ldots\overline{n}\,\overline{n+1}}(w) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & w_{\alpha i} & w_{\alpha\overline{1}} & \cdots & w_{\alpha\overline{n}} & w_{\alpha\overline{n+1}} \\ -1 & w_{\underline{1}i} & w_{\underline{1}\,\overline{1}} & \cdots & w_{\underline{1}\,\overline{n}} & w_{\underline{1}\,\overline{n+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & w_{\underline{n}i} & w_{\underline{n}\,\overline{1}} & \cdots & w_{\underline{n}\,\overline{n}} & w_{\underline{n}\,\overline{n+1}} \\ -1 & w_{\underline{n+1}i} & w_{\underline{n+1}\,\overline{1}} & \cdots & w_{\underline{n+1}\,\overline{n}} & w_{\underline{n+1}\,\overline{n+1}} \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

В этом случае для разделения переменных недостаточно разложить определитель (9) по элементам одной строки или одного столбца. Чтобы установить общий алгоритм разделения переменных, рассмотрим последовательно следующие частные случаи:

$n = 0$

Найдём репрезентатор $\overset{0}{w}_{\alpha i}$ как корень фундаментального уравнения

$$\overset{1}{K}{}^{11}_{\alpha\underline{1};i\overline{1}}(\overset{0}{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \overset{0}{w}_{\alpha i} & \overset{0}{w}_{\alpha\overline{1}} \\ -1 & \overset{0}{w}_{\underline{1}i} & \overset{0}{w}_{\underline{1}\,\overline{1}} \end{vmatrix} = 0. \qquad (10)$$

См. рис. 5.

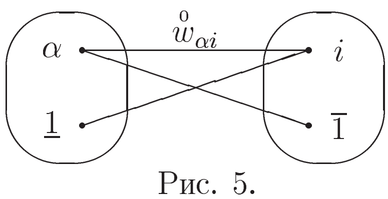


Рис. 5.

Уравнение (10) может быть записано в виде:

$$\overset{1}{K}{}^{11}_{\alpha\underline{1};i\overline{1}}(\overset{0}{w}) = \overset{0}{w}_{\alpha i}\,\overset{0}{K}{}^{11}_{\underline{1};\overline{1}} - \overset{1}{K}{}^{10}_{\alpha\underline{1};\overline{1}} - \overset{1}{K}{}^{01}_{\underline{1};i\overline{1}} - \overset{1}{K}{}^{00}_{\underline{1};\overline{1}} = 0$$

Вводя следующие обозначения

$$\sigma(\alpha)=\frac{\overset{1}{K}{}^{10}_{\alpha\underline{1};\bar{1}}}{\overset{0}{K}{}^{11}_{\underline{1};\bar{1}}},\qquad s(i)=\frac{\overset{1}{K}{}^{01}_{\underline{1};i\bar{1}}}{\overset{0}{K}{}^{11}_{\underline{1};\bar{1}}},$$

$$C=\frac{\overset{1}{K}{}^{00}_{\underline{1};\bar{1}}}{\overset{0}{K}{}^{11}_{\underline{1};\bar{1}}}.$$

получаем *репрезентатор* $\overset{0}{w}_{\alpha i}$ *с двумя хвостами - с правым* $\sigma(\alpha)$ *и с левым* $s(i)$:

$$\boxed{\overset{0}{w}_{\alpha i}=s(i)+\sigma(\alpha)+C}$$

$\boldsymbol{n=1}$

Найдём репрезентатор $\overset{1}{w}_{\alpha i}$ как корень фундаментального уравнения

$$\overset{2}{K}{}^{11}_{\alpha\underline{1}\,\underline{2};i\bar{1}\,\bar{2}}(\overset{1}{w})=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\-1&\overset{1}{w}_{\alpha i}&\overset{1}{w}_{\alpha\bar{1}}&\overset{1}{w}_{\alpha\bar{2}}\\-1&\overset{1}{w}_{\underline{1}i}&\overset{1}{w}_{\underline{1}\bar{1}}&\overset{1}{w}_{\underline{1}\bar{2}}\\-1&\overset{1}{w}_{\underline{2}i}&\overset{1}{w}_{\underline{2}\bar{1}}&\overset{1}{w}_{\underline{2}\bar{2}}\end{vmatrix}=0. \tag{11}$$

См. рис. 6.

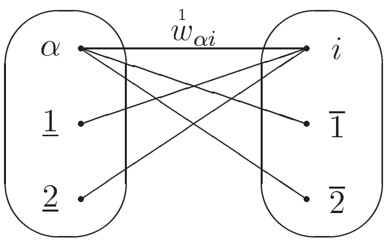


Рис. 6.

Уравнение (11) может быть записано в виде:

$$\overset{2}{K}{}^{11}_{\alpha\underline{1}\,\underline{2};i\bar{1}\,\bar{2}}(\overset{1}{w})=\overset{1}{w}_{\alpha i}\,\overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{1}\,\underline{2};\bar{1}\,\bar{2}}+\overset{2}{K}{}^{10}_{\alpha\underline{1}\,\underline{2};\bar{1}\,\bar{2}}+\overset{2}{K}{}^{01}_{\underline{1}\,\underline{2};i\bar{1}\,\bar{2}}-\overset{2}{K}{}^{00}_{\underline{1}\,\underline{2};\bar{1}\,\bar{2}}-\overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{1}\,\underline{2};i}\cdot\overset{1}{K}{}^{01}_{\alpha;\bar{1}\,\bar{2}}=0$$

Вводя следующие обозначения

$$\xi(\alpha)_1=\overset{1}{K}{}^{01}_{\alpha;\bar{1}\,\bar{2}},\qquad x^1(i)=\frac{\overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{1}\,\underline{2};i}}{\overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{1}\,\underline{2};\bar{1}\,\bar{2}}},$$

$$\sigma(\alpha)=-\frac{\overset{2}{K}{}^{10}_{\alpha\underline{1}\,\underline{2};\bar{1}\,\bar{2}}}{\overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{1}\,\underline{2};\bar{1}\,\bar{2}}},\qquad s(i)=-\frac{\overset{2}{K}{}^{01}_{\underline{1}\,\underline{2};i\bar{1}\,\bar{2}}}{\overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{1}\,\underline{2};\bar{1}\,\bar{2}}},$$

$$C=\frac{\overset{2}{K}{}^{00}_{\underline{1}\,\underline{2};\bar{1}\,\bar{2}}}{\overset{1}{K}{}^{11}_{\underline{1}\,\underline{2};\bar{1}\,\bar{2}}}\quad.$$

получаем *скалярное произведение* $\overset{1}{w}_{\alpha i}$ *с двумя хвостами - с правым* $\sigma(\alpha)$ *и с левым* $s(i)$:

$$\boxed{\overset{1}{w}_{\alpha i} = s(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \sigma(\alpha) + C}$$

$n = 2$

Найдём репрезентатор $\overset{2}{w}_{\alpha i}$ как корень фундаментального уравнения

$$\overset{3}{K}{}^{11}_{\alpha\underline{1}\underline{2}\underline{3};i\overline{1}\overline{2}\overline{3}}(\overset{2}{w}_{\alpha i}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & w_{\alpha i} & w_{\alpha\overline{1}} & w_{\alpha\overline{2}} & w_{\alpha\overline{3}} \\ -1 & w_{\underline{1}i} & w_{\underline{1}\overline{1}} & w_{\underline{1}\overline{2}} & w_{\underline{1}\overline{3}} \\ -1 & w_{\underline{2}i} & w_{\underline{2}\overline{1}} & w_{\underline{2}\overline{2}} & w_{\underline{2}\overline{3}} \\ -1 & w_{\underline{3}i} & w_{\underline{3}\overline{1}} & w_{\underline{3}\overline{2}} & w_{\underline{3}\overline{3}} \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

См. рис. 7.

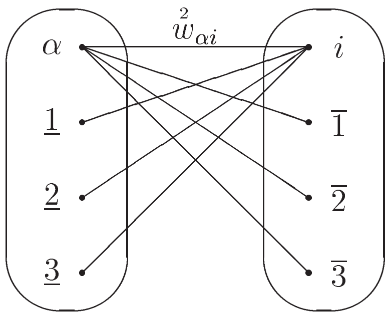


Рис. 7.

Уравнение (12) может быть записано в виде:

$$\overset{3}{K}{}^{11}_{\alpha\underline{1}\underline{2}\underline{3};i\overline{1}\overline{2}\overline{3}}(\overset{2}{w}_{\alpha i}) = \overset{2}{w}_{\alpha i}\,\overset{2}{K}{}^{11}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3};\overline{1}\overline{2}\overline{3}} - \overset{3}{K}{}^{10}_{\alpha\underline{1}\underline{2}\underline{3};\overline{1}\overline{2}\overline{3}} - \overset{3}{K}{}^{01}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3};i\overline{1}\overline{2}\overline{3}} - \overset{3}{K}{}^{00}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3};\overline{1}\overline{2}\overline{3}} +$$

$$+\ \overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{1}\underline{3};i}(\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{3};\overline{1}\overline{2}\overline{3}} + \overset{2}{K}{}^{01}_{\underline{2}\alpha;\overline{1}\overline{2}\overline{3}}) -$$

$$-\ \overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{2}\underline{3};i}(\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{3};\overline{1}\overline{2}\overline{3}} + \overset{2}{K}{}_{\underline{1}\alpha;\overline{1}\overline{2}\overline{3}}).$$

Вводя следующие обозначения

$$\xi(\alpha)_1 = -\,(\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{3};\overline{1}\overline{2}\overline{3}} + \overset{2}{K}{}_{\underline{2}\alpha;\overline{1}\overline{2}\overline{3}}), \qquad x^1(i) = \overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{1}\underline{3};i},$$

$$\xi(\alpha)_2 = (\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{3};\overline{1}\overline{2}\overline{3}} + \overset{2}{K}{}_{\underline{1}\alpha;\overline{1}\overline{2}\overline{3}}), \qquad x^2(i) = \overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{2}\underline{3};i},$$

$$\sigma(\alpha) = \frac{\overset{3}{K}{}^{10}_{\alpha\underline{1}\underline{2}\underline{3};\overline{1}\overline{2}\overline{3}}}{\overset{2}{K}{}^{11}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3};\overline{1}\overline{2}\overline{3}}}, \qquad s(i) = \frac{\overset{3}{K}{}^{01}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3};i\overline{1}\overline{2}\overline{3}}}{\overset{2}{K}{}^{11}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3};\overline{1}\overline{2}\overline{3}}},$$

$$C = \frac{\overset{3}{K}{}^{00}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3};\overline{1}\overline{2}\overline{3}}}{\overset{2}{K}{}^{11}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3};\overline{1}\overline{2}\overline{3}}},$$

получаем *скалярное произведение* $\overset{2}{w}_{\alpha i}$ *с двумя хвостами - с правым* $\sigma(\alpha)$ *и с левым* $s(i)$:

$$\boxed{\overset{2}{w}_{\alpha i} = s(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \xi(\alpha)_2 x^2(i) + \sigma(\alpha) + C}$$

$\boldsymbol{n = 3}$

Найдём репрезентатор $\overset{3}{w}_{\alpha i}$ как корень фундаментального уравнения

$$\overset{4}{K}{}^{11}_{\alpha\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};i\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}(\overset{3}{w}_{\alpha i}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & w_{\alpha i} & w_{\alpha\overline{1}} & w_{\alpha\overline{2}} & w_{\alpha\overline{3}} & w_{\alpha\overline{4}} \\ -1 & w_{\underline{1}i} & w_{\underline{1}\overline{1}} & w_{\underline{1}\overline{2}} & w_{\underline{1}\overline{3}} & w_{\underline{1}\overline{4}} \\ -1 & w_{\underline{2}i} & w_{\underline{2}\overline{1}} & w_{\underline{2}\overline{2}} & w_{\underline{2}\overline{3}} & w_{\underline{2}\overline{4}} \\ -1 & w_{\underline{3}i} & w_{\underline{3}\overline{1}} & w_{\underline{3}\overline{2}} & w_{\underline{3}\overline{3}} & w_{\underline{3}\overline{4}} \\ -1 & w_{\underline{4}i} & w_{\underline{4}\overline{1}} & w_{\underline{4}\overline{2}} & w_{\underline{4}\overline{3}} & w_{\underline{4}\overline{4}} \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

См. рис. 8.

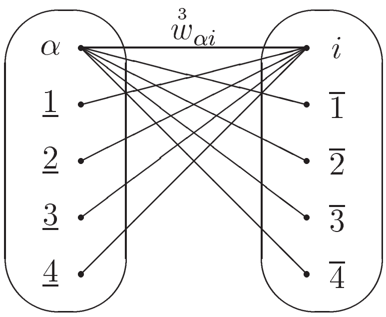


Рис. 8.

Уравнение (13) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \overset{4}{K}{}^{11}_{\alpha\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};i\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}(\overset{3}{w}_{\alpha i}) = \overset{3}{w}_{\alpha i}\, \overset{3}{K}{}^{11}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} + \overset{4}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};i\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} + \overset{4}{K}{}^{10}_{\alpha\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};i\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} - \\ - \overset{4}{K}{}^{00}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} - \overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{1}\underline{4};i}(\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} + \overset{3}{K}{}^{01}_{\underline{2}\alpha\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} + \overset{3}{K}{}^{01}_{\underline{2}\underline{3}\alpha;\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}) + \\ + \overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{2}\underline{4};i}(\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} + \overset{3}{K}{}^{01}_{\underline{1}\alpha\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} + \overset{3}{K}{}^{01}_{\underline{1}\underline{3}\alpha;\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}) - \\ - \overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{3}\underline{4};i}(\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{2}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} + \overset{3}{K}{}^{01}_{\underline{1}\alpha\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} + \overset{3}{K}{}^{01}_{\underline{1}\underline{2}\alpha;\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}) \end{aligned}$$

Вводя следующие обозначения

$$\xi(\alpha)_1 = \overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} + \overset{3}{K}{}_{\underline{2}\alpha\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} + \overset{3}{K}{}_{\underline{2}\underline{3}\alpha;\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}; \qquad x^1(i) = \frac{\overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{1}\underline{4};i}}{\overset{3}{K}{}^{11}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}}$$

$$\xi(\alpha)_2 = -\,(\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} + \overset{3}{K}{}_{\underline{1}\alpha\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} + \overset{3}{K}{}_{\underline{1}\underline{3}\alpha;\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}); \qquad x^2(i) = \frac{\overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{2}\underline{4};i}}{\overset{3}{K}{}^{11}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}}$$

$$\xi(\alpha)_3 = \overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\underline{2}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} + \overset{3}{K}{}_{\underline{1}\alpha\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}} + \overset{3}{K}{}_{\underline{1}\underline{2}\alpha;\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}; \qquad x^3(i) = \frac{\overset{1}{K}{}^{10}_{\underline{3}\underline{4};i}}{\overset{3}{K}{}^{11}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}}$$

$$\sigma(\alpha) = -\frac{\overset{4}{K}{}^{10}_{\alpha\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}}{\overset{3}{K}{}^{11}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}}; \qquad s(i) = -\frac{\overset{4}{K}{}^{01}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};i\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}}{\overset{3}{K}{}^{11}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}};$$

$$C = \frac{\overset{4}{K}{}^{00}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}}{\overset{3}{K}{}^{11}_{\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4};\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{4}}} \quad .$$

получаем *скалярное произведение* $\overset{3}{w}_{\alpha i}$ *с двумя хвостами - с правым* $\sigma(\alpha)$ *и с левым* $s(i)$:

$$\boxed{\overset{3}{w}_{\alpha i} = s(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \xi(\alpha)_2 x^2(i) + \xi(\alpha)_3 x^3(i) + \sigma(\alpha) + C}$$

§ 5. Дробно-линейные репрезентаторы $p_{\alpha i}$ и $q_{\alpha i}$ как корни двух фундаментальных уравнений Михайличенко.

1. Репрезентатор $p_{\alpha i}$ как корень фундаментального уравнения

$$M_{\alpha\beta;ikmn}(p_{*;*}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p_{\alpha i} & p_{\alpha k} & p_{\alpha m} & p_{\alpha n} \\ p_{\beta i} & p_{\beta k} & p_{\beta m} & p_{\beta n} \\ p_{\alpha i}p_{\beta i} & p_{\alpha k}p_{\beta k} & p_{\alpha m}p_{\beta m} & p_{\alpha n}p_{\beta n} \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

В исходном определителе (14) зафиксируем $1+3$ нечисловых переменных и осуществим следующие переобозначения:

$$\beta = \underline{1} \qquad k = \overline{1}, \quad m = \overline{2}, \quad n = \overline{3}$$

См. рис. 9.

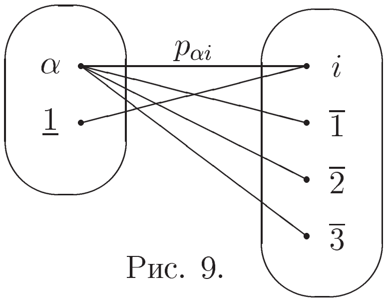


Рис. 9.

После этого уравнение (14) будет выглядеть следующим образом:

$$M_{\alpha\underline{1};i\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}}(p)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ p_{\alpha i} & p_{\alpha\overline{1}} & p_{\alpha\overline{2}} & p_{\alpha\overline{3}}\\ p_{\underline{1}i} & p_{\underline{1}\overline{1}} & p_{\underline{1}\overline{2}} & p_{\underline{1}\overline{3}}\\ p_{\alpha i}p_{\underline{1}i} & p_{\alpha\overline{1}}p_{\underline{1}\overline{1}} & p_{\alpha\overline{2}}p_{\underline{1}\overline{2}} & p_{\alpha\overline{3}}p_{\underline{1}\overline{3}}\end{vmatrix}=0 \tag{15}$$

Разрешая уравнение (15) относительно репрезентатора $p_{\alpha i}$ получим следующее соотношение

$$p_{\alpha i}=\frac{p_{\underline{1}i}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ p_{\alpha\overline{1}} & p_{\alpha\overline{2}} & p_{\alpha\overline{3}}\\ p_{\alpha\overline{1}}p_{\underline{1}\overline{1}} & p_{\alpha\overline{2}}p_{\underline{1}\overline{2}} & p_{\alpha\overline{3}}p_{\underline{1}\overline{3}}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p_{\alpha\overline{1}} & p_{\alpha\overline{2}} & p_{\alpha\overline{3}}\\ p_{\underline{1}\overline{1}} & p_{\underline{1}\overline{2}} & p_{\underline{1}\overline{3}}\\ p_{\alpha\overline{1}}p_{\underline{1}\overline{1}} & p_{\alpha\overline{2}}p_{\underline{1}\overline{2}} & p_{\alpha\overline{3}}p_{\underline{1}\overline{3}}\end{vmatrix}}{p_{\underline{1}i}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ p_{\alpha\overline{1}} & p_{\alpha\overline{2}} & p_{\alpha\overline{3}}\\ p_{\underline{1}\overline{1}} & p_{\underline{1}\overline{2}} & p_{\underline{1}\overline{3}}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ p_{\underline{1}\overline{1}} & p_{\underline{1}\overline{2}} & p_{\underline{1}\overline{3}}\\ p_{\alpha\overline{1}}p_{\underline{1}\overline{1}} & p_{\alpha\overline{2}}p_{\underline{1}\overline{2}} & p_{\alpha\overline{3}}p_{\underline{1}\overline{3}}\end{vmatrix}} \tag{16}$$

Вводя обозначения

$$x_i=p_{\underline{1}i}$$

$$\xi_\alpha=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ p_{\alpha\overline{1}} & p_{\alpha\overline{2}} & p_{\alpha\overline{3}}\\ p_{\alpha\overline{1}}p_{\underline{1}\overline{1}} & p_{\alpha\overline{2}}p_{\underline{1}\overline{2}} & p_{\alpha\overline{3}}p_{\underline{1}\overline{3}}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ p_{\alpha\overline{1}} & p_{\alpha\overline{2}} & p_{\alpha\overline{3}}\\ p_{\underline{1}\overline{1}} & p_{\underline{1}\overline{2}} & p_{\underline{1}\overline{3}}\end{vmatrix}}$$

$$\eta_\alpha=\frac{\begin{vmatrix} p_{\alpha\overline{1}} & p_{\alpha\overline{2}} & p_{\alpha\overline{3}}\\ p_{\underline{1}\overline{1}} & p_{\underline{1}\overline{2}} & p_{\underline{1}\overline{3}}\\ p_{\alpha\overline{1}}p_{\underline{1}\overline{1}} & p_{\alpha\overline{2}}p_{\underline{1}\overline{2}} & p_{\alpha\overline{3}}p_{\underline{1}\overline{3}}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ p_{\alpha\overline{1}} & p_{\alpha\overline{2}} & p_{\alpha\overline{3}}\\ p_{\underline{1}\overline{1}} & p_{\underline{1}\overline{2}} & p_{\underline{1}\overline{3}}\end{vmatrix}}$$

$$\zeta_\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_{\underline{1}\overline{1}} & p_{\underline{1}\overline{2}} & p_{\underline{1}\overline{3}} \\ p_{\alpha\overline{1}}p_{\underline{1}\overline{1}} & p_{\alpha\overline{2}}p_{\underline{1}\overline{2}} & p_{\alpha\overline{3}}p_{\underline{1}\overline{3}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_{\alpha\overline{1}} & p_{\alpha\overline{2}} & p_{\alpha\overline{3}} \\ p_{\underline{1}\overline{1}} & p_{\underline{1}\overline{2}} & p_{\underline{1}\overline{3}} \end{vmatrix}}$$

перепишем выражение (16) для репрезентатора $p_{\alpha i}$ в виде следующего дробно-линейного отношения:

$$\boxed{p_{\alpha i} = \frac{x_i \xi_\alpha + \eta_\alpha}{x_i + \zeta_\alpha}}$$

2. Репрезентатор $q_{\alpha i}$ как корень фундаментального уравнения

$$M_{\alpha\beta\gamma\delta;ik}(q_{*;*}) = \begin{vmatrix} 1 & q_{\alpha i} & q_{\alpha k} & q_{\alpha i}q_{\alpha k} \\ 1 & q_{\beta i} & q_{\beta k} & q_{\beta i}q_{\beta k} \\ 1 & q_{\gamma i} & q_{\gamma k} & q_{\gamma i}q_{\gamma k} \\ 1 & q_{\delta i} & q_{\delta k} & q_{\delta i}q_{\delta k} \end{vmatrix} = 0. \qquad (17)$$

Как и в предыдущем случае, в исходном определителе (17) зафиксируем $3+1$ нечисловых переменных и осуществим следующие переобозначения:

$$\beta = \underline{1} \qquad k = \overline{1}$$
$$\gamma = \underline{2}$$
$$\delta = \underline{3}$$

См. рис. 10.

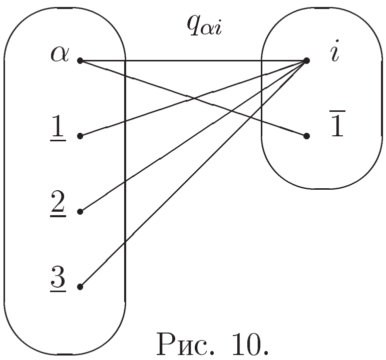


Рис. 10.

После этого уравнение (17) будет выглядеть следующим образом:

$$M_{\alpha\,\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{3};i\overline{1}}(q_{*;*}) = \begin{vmatrix} 1 & q_{\alpha i} & q_{\alpha\overline{1}} & q_{\alpha i}q_{\alpha\overline{1}} \\ 1 & q_{\underline{1}i} & q_{\underline{1}\overline{1}} & q_{\underline{1}i}q_{\underline{1}\overline{1}} \\ 1 & q_{\underline{2}i} & q_{\underline{2}\overline{1}} & q_{\underline{2}i}q_{\underline{2}\overline{1}} \\ 1 & q_{\underline{3}i} & q_{\underline{3}\overline{1}} & q_{\underline{3}i}q_{\underline{3}\overline{1}} \end{vmatrix} = 0 \qquad (18)$$

Разрешая уравнение (18) относительно репрезентатора $q_{\alpha i}$ получим следующее соотношение

$$q_{\alpha i} = \frac{q_{\alpha\bar{1}}\begin{vmatrix} 1 & q_{\underline{1}i} & q_{\underline{1}i}q_{\underline{1}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{2}i} & q_{\underline{2}i}q_{\underline{2}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{3}i} & q_{\underline{3}i}q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_{\underline{1}i} & q_{\underline{1}\bar{1}} & q_{\underline{1}i}q_{\underline{1}\bar{1}} \\ q_{\underline{2}i} & q_{\underline{2}\bar{1}} & q_{\underline{2}i}q_{\underline{2}\bar{1}} \\ q_{\underline{3}i} & q_{\underline{3}\bar{1}} & q_{\underline{3}i}q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix}}{q_{\alpha\bar{1}}\begin{vmatrix} 1 & q_{\underline{1}i} & q_{\underline{1}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{2}i} & q_{\underline{2}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{3}i} & q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & q_{\underline{1}\bar{1}} & q_{\underline{1}i}q_{\underline{1}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{2}\bar{1}} & q_{\underline{2}i}q_{\underline{2}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{3}\bar{1}} & q_{\underline{3}i}q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix}} \tag{19}$$

Вводя обозначения

$$\xi_\alpha = q_{\alpha\bar{1}}$$

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} 1 & q_{\underline{1}i} & q_{\underline{1}i}q_{\underline{1}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{2}i} & q_{\underline{2}i}q_{\underline{2}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{3}i} & q_{\underline{3}i}q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & q_{\underline{1}i} & q_{\underline{1}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{2}i} & q_{\underline{2}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{3}i} & q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix}}, \qquad y_i = \frac{\begin{vmatrix} q_{\underline{1}i} & q_{\underline{1}\bar{1}} & q_{\underline{1}i}q_{\underline{1}\bar{1}} \\ q_{\underline{2}i} & q_{\underline{2}\bar{1}} & q_{\underline{2}i}q_{\underline{2}\bar{1}} \\ q_{\underline{3}i} & q_{\underline{3}\bar{1}} & q_{\underline{3}i}q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & q_{\underline{1}i} & q_{\underline{1}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{2}i} & q_{\underline{2}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{3}i} & q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix}}, \qquad z_i = \frac{\begin{vmatrix} 1 & q_{\underline{1}\bar{1}} & q_{\underline{1}i}q_{\underline{1}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{2}\bar{1}} & q_{\underline{2}i}q_{\underline{2}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{3}\bar{1}} & q_{\underline{3}i}q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & q_{\underline{1}i} & q_{\underline{1}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{2}i} & q_{\underline{2}\bar{1}} \\ 1 & q_{\underline{3}i} & q_{\underline{3}\bar{1}} \end{vmatrix}}$$

перепишем выражение (19) для репрезентатора $q_{\alpha i}$ в виде следующего дробно-линейного отношения:

$$\boxed{q_{\alpha i} = \frac{\xi_\alpha x_i + y_i}{\xi_\alpha + z_i}}$$

§ 6. Предварительные итоги.

Итак, введя "руками", то есть достаточно произвольным образом[52], шесть новых двух-, трёх- и четырёхиндексных переменных

$$Q_{\alpha;i} = \varphi_{\alpha i}$$

$$Q_{\alpha;im} = \varphi_{\alpha i} - \varphi_{\alpha m}$$

$$Q_{\alpha\gamma;i} = \varphi_{\alpha i} - \varphi_{\gamma i}$$

$$Q_{\alpha\gamma;im} = \varphi_{\alpha i} - \varphi_{\alpha m} - \varphi_{\gamma i} + \varphi_{\gamma m}$$

[52]Замечу, что новые переменные Q образованы мной из двухиндексных переменных $\varphi_{\alpha i}$ не совсем произвольным образом, а только с помощью двух обратных операций – операции вычитания и операции деления.

$$Q_{\alpha;imn} = \frac{\varphi_{\alpha i} - \varphi_{\alpha m}}{\varphi_{\alpha i} - \varphi_{\alpha n}}$$
$$Q_{\alpha\gamma\delta;i} = \frac{\varphi_{\alpha i} - \varphi_{\gamma i}}{\varphi_{\alpha i} - \varphi_{\delta i}}$$

и подставляя их в исходный определитель $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N}$, мы получили шесть семейств различных типов определителей:

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N}(Q_{*;*}) = A^{00}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N}(\varphi_{**})$$
$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N}(Q_{*;*i_{N+1}}) = A^{01}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{**})$$
$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N}(Q_{*\alpha_{N+1};*}) = A^{10}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N \alpha_{N+1}; i_1 \ldots i_N}(\varphi_{**})$$
$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N}(Q_{*\alpha_{N+1};*i_{N+1}}) = A^{11}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N \alpha_{N+1}; i_1 \ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{**})$$

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N}(Q_{*;*i_{N+1}i_{N+2}}) = A^{02}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N i_{N+1} i_{N+2}}(\varphi_{**})$$
$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N}(Q_{*\alpha_{N+1}\alpha_{N+2};*}) = A^{20}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N \alpha_{N+1}\alpha_{N+2}; i_1 \ldots i_N}(\varphi_{**})$$

Первые четыре типа уравнений

$$A^{00}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N}(a) = 0$$
$$A^{01}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N i_{N+1}}(u) = 0$$
$$A^{10}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N \alpha_{N+1}; i_1 \ldots i_N}(v) = 0$$
$$A^{11}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N \alpha_{N+1}; i_1 \ldots i_N i_{N+1}}(w) = 0$$

при любых $N = 1, 2, 3, \ldots$ имеют следующие решения:

$$\varphi^{00}_{\alpha i} = \overset{N-1}{a}_{\alpha i} = \qquad \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \xi(\alpha)_{N-1} x^{N-1}(i),$$

$$\varphi^{01}_{\alpha i} = \overset{N-1}{u}_{\alpha i} = \qquad \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \xi(\alpha)_{N-1} x^{N-1}(i) + \sigma(\alpha),$$

$$\varphi^{10}_{\alpha i} = \overset{N-1}{v}_{\alpha i} = s(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \xi(\alpha)_{N-1} x^{N-1}(i),$$

$$\varphi^{11}_{\alpha i} = \overset{N-1}{w}_{\alpha i} = s(i) + \xi(\alpha)_1 x^1(i) + \xi(\alpha)_{N-1} x^{N-1}(i) + \sigma(\alpha).$$

Что же касается уравнений

$$A^{02}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N; i_1 \ldots i_N i_{N+1} i_{N+2}}(p) = 0$$
$$A^{20}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N \alpha_{N+1} \alpha_{N+2}; i_1 \ldots i_N}(q) = 0,$$

то среди них имеется только два уравнения (при $N = 2$)

$$A^{02}_{\alpha\beta;\,ikmn}(p) = 0$$
$$A^{20}_{\alpha\beta\gamma\delta;\,ik}(q) = 0,$$

которые имеют соответствующие решения:

$$\varphi^{02}_{\alpha i} = p_{\alpha i} = \frac{\xi_\alpha x_i + \eta_\alpha}{x_i + \zeta_\alpha}$$

$$\varphi^{20}_{\alpha i} = q_{\alpha i} = \frac{\xi_\alpha x_i + y_i}{\xi_\alpha + z_i}.$$

Итак, мы пришли наиболее коротким путём, правда, без существенного в данном случае доказательства единственности, к существованию следующих четырёх семейств определителей:

$$A^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;\,i_1\ldots i_N}(\varphi) = \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} \end{vmatrix},$$

$$A^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;\,i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi) = \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & \varphi_{\alpha_N i_{N+1}} \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$A^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};\,i_1\ldots i_N}(\varphi) = \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & 1 \\ \varphi_{\alpha_{N+1} i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_{N+1} i_N} & 1 \end{vmatrix},$$

$$A^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};\,i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & \varphi_{\alpha_1 i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_1 i_N} & \varphi_{\alpha_1 i_{N+1}} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -1 & \varphi_{\alpha_N i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_N i_N} & \varphi_{\alpha_N i_{N+1}} \\ -1 & \varphi_{\alpha_{N+1} i_1} & \cdots & \varphi_{\alpha_{N+1} i_N} & \varphi_{\alpha_{N+1} i_{N+1}} \end{vmatrix},$$

и соответствующих репрезентаторов

$$\overset{N-1}{a}{}_{\alpha i}, \quad \overset{N-1}{u}{}_{\alpha i}, \quad \overset{N-1}{v}{}_{\alpha i}, \quad \overset{N-1}{w}{}_{\alpha i}$$

и двух уникальных определителей – определителей Михайличенко

$$A^{02}_{\alpha\beta;\,ikmn}(\varphi)=M_{\alpha\beta;ikmn}(\varphi)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ \varphi\alpha i & \varphi\alpha k & \varphi\alpha m & \varphi\alpha n\\ \varphi\beta i & \varphi\beta k & \varphi\beta m & \varphi\beta n\\ \varphi\alpha i\varphi\beta i & \varphi\alpha k\varphi\beta k & \varphi\alpha m\varphi\beta m & \varphi\alpha n\varphi\beta n\end{vmatrix}$$

$$A^{20}_{\alpha\beta\gamma\delta;\,ik}(\varphi)=M_{\alpha\beta\gamma\delta;ik}(\varphi)=\begin{vmatrix}1 & \varphi\alpha i & \varphi\alpha k & \varphi\alpha i\varphi\alpha k\\ 1 & \varphi\beta i & \varphi\beta k & \varphi\beta i\varphi\beta k\\ 1 & \varphi\gamma i & \varphi\gamma k & \varphi\gamma i\varphi\gamma k\\ 1 & \varphi\delta i & \varphi\delta k & \varphi\delta i\varphi\delta k\end{vmatrix}$$

и соответствующих дробно-линейных репрезентаторов $p_{\alpha i}$ $q_{\alpha i}$. При этом имеет место удивительный факт:

Одним из основных результатов Теории физических структур, исходящей из чрезвычайно общего принципа сакральной симметрии, является теорема Михайличенко, согласно которой все только что приведённые определители и соответствующие репрезентаторы **являются единственными решениями** некоторого чрезвычайно общего сакрального тождества, лежащего в основании Теории физических структур

$$\forall\ \ \alpha_1,\ldots,\alpha_s\ \in\underline{\mathfrak{N}}\quad\ \forall\ \ i_1,\ldots,i_r\ \in\overline{\mathfrak{M}}$$

$$\Phi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s;\,i_1,\ldots,i_r}(\varphi)\equiv 0.$$

Дальнейший шаг в понимании единства приведённого выше квартета определителей состоит в их двойном окаймлении, то есть в переходе от определителей

$$A^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;\,i_1\ldots i_N}(\varphi)$$

$$A^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;\,i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi)$$

$$A^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};\,i_1\ldots i_N}(\varphi)$$

$$A^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};\,i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi)$$

к равным им дважды окаймлённым фундаментальным определителям

$$\overset{N}{K}{}^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(\varphi),$$

$$\overset{N}{K}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi),$$

$$\overset{N}{K}{}^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N}(\varphi),$$

$$\overset{N}{K}{}^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi).$$

Таким образом, все виды фундаментальных определителей, лежащих в основании всей физики и геометрии (а также в основании некоторых других разделов математики), изображены на рис. 11.

Используя двух-, трёх- и четырёхиндексные переменные, можно записать все виды фундаментальных определителей, включая и уникальные определители Михайличенко $\overset{1}{M}{}^{02}$, $\overset{2}{M}{}^{02}$ и $\overset{1}{M}{}^{20}$, $\overset{2}{M}{}^{20}$, в виде простейших определителей Грама:

$$\overset{N}{K}{}^{00}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(\varphi_{**}) =$$

$$= \Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(Q_{*;*}) = \begin{vmatrix} Q_{\alpha_1;i_1} & \ldots & Q_{\alpha_1;i_N} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_{\alpha_N;i_1} & \ldots & Q_{\alpha_N;i_N} \end{vmatrix},$$

$$\overset{N}{K}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{**}) =$$

$$= \Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(Q_{*;*i_{N+1}}) = \begin{vmatrix} Q_{\alpha_1;i_1 i_{N+1}} & \ldots & Q_{\alpha_1;i_N i_{N+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_{\alpha_N;i_1 i_{N+1}} & \ldots & Q_{\alpha_N;i_N i_{N+1}} \end{vmatrix},$$

$$\overset{N}{K}{}^{10}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N}(\varphi_{**}) =$$

$$= \Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(Q_{*\alpha_{N+1};*}) = \begin{vmatrix} Q_{\alpha_1\alpha_{N+1};i_1} & \ldots & Q_{\alpha_1\alpha_{N+1};i_N} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_{\alpha_N\alpha_{N+1};i_1} & \ldots & Q_{\alpha_N\alpha_{N+1};i_N} \end{vmatrix},$$

$$\overset{N}{K}{}^{11}_{\alpha_1\ldots\alpha_N\alpha_{N+1};i_1\ldots i_N i_{N+1}}(\varphi_{**}) =$$

$$= \Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_N;i_1\ldots i_N}(Q_{*\alpha_{N+1};*i_{N+1}}) = \begin{vmatrix} Q_{\alpha_1\alpha_{N+1};i_1 i_{N+1}} & \ldots & Q_{\alpha_1\alpha_{N+1};i_N i_{N+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_{\alpha_N\alpha_{N+1};i_1 i_{N+1}} & \ldots & Q_{\alpha_N\alpha_{N+1};i_N i_{N+1}} \end{vmatrix}.$$

$$\overset{1}{K}{}^{02}_{\alpha;\,imn}(\varphi_{**}) = \Gamma_{\alpha;\,i}(Q_{*;*mn}) = \begin{vmatrix} Q_{\alpha;imn} \end{vmatrix},$$

$$\overset{2}{K}{}^{02}_{\alpha\beta;\,ikmn}(\varphi_{**}) = \Gamma_{\alpha\beta;\,ik}(Q_{*;*mn}) = \begin{vmatrix} Q_{\alpha;imn} & Q_{\alpha;kmn} \\ Q_{\beta;imn} & Q_{\beta;kmn} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{Q_{\alpha;in}Q_{\alpha;kn}Q_{\beta;in}Q_{\beta;kn}} M_{\alpha\beta;ikmn}(\varphi_{**})$$

$$\overset{1}{K}{}^{20}_{\alpha\gamma\delta;\,i}(\varphi_{**}) = \Gamma_{\alpha;\,i}(Q_{*\gamma\delta;*}) = \left|\ Q_{\alpha\gamma\delta;\,i}\ \right|,$$

$$\overset{2}{K}{}^{20}_{\alpha\beta\gamma\delta;\,ik}(\varphi_{**}) = \Gamma_{\alpha\beta;\,ik}(Q_{*\gamma\delta;*}) = \begin{vmatrix} Q_{\alpha\gamma\delta;i} & Q_{\alpha\gamma\delta;k} \\ Q_{\beta\gamma\delta;i} & Q_{\beta\gamma\delta;k} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{Q_{\alpha\delta;i}Q_{\alpha\delta;k}Q_{\beta\delta;i}Q_{\beta\delta;k}} M_{\alpha\beta\gamma\delta;ik}(\varphi_{**})$$

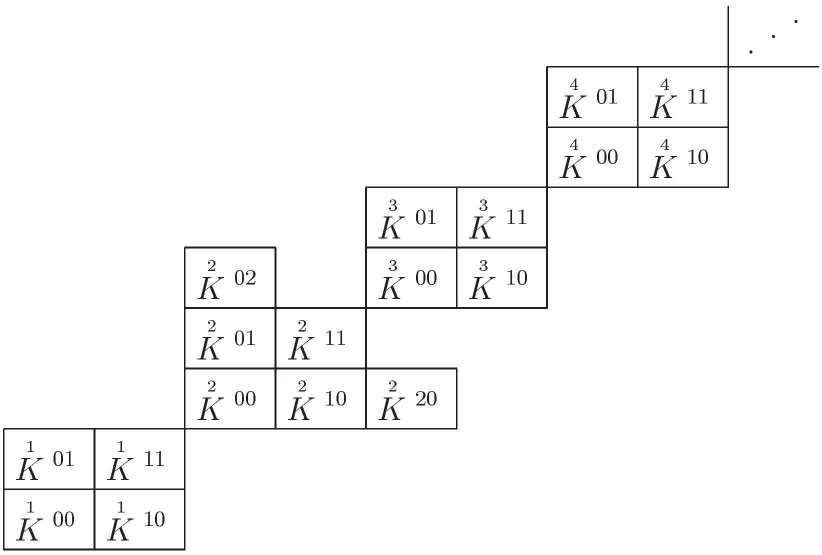


Рис. 11. Все возможные определители, лежащие в основании физики и геометрии.

Литература к главе 9

[1]. *Кокстер Г.С.М.*, Введение в геометрию, "Наука", – М:, 1966, С. 13.

[2]. *Клейн Феликс* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 2. Геометрия, - М.: Наука. 1987. - С. 220.