Пример 18. Механика Гамильтона–Якоби

Начнём с традиционного изложения. Обычно действие S определяется как интеграл от функции Лагранжа [1]

$$S = \int\limits_{t_0}^{t} L d\tau \tag{1}$$

или

$$\frac{dS}{dt} = \overline{L} \quad \text{и} \quad \frac{dS}{dt_0} = -L_0.$$

Но что скрывается за этими формулами?

Рассмотрим это определение более подробно. Начнём с интеграла

$$\widetilde{S} = \int\limits_{t_0}^{t} \overline{L}\big(q(q_0, v_0, \tau), v(q_0, v_0, \tau), \tau\big) d\tau = \widetilde{S}(q_0, v_0, t, \tau_0). \tag{2}$$

Из $q^\mu = q^\mu(q_0^\mu, v_0^\mu; t)$ находим

$$v_0^\mu = v_0^\mu(q^\mu, q_0^\mu, t). \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2) получим окончательное выражение для действия как функции q, q_0, t, t_0 :

$$S = \widetilde{S}\big(q_0, v_0(q, q_0, t), t, t_0\big) = S(q^\mu, t; q_0^\mu, t_0).$$

Чтобы найти частные производные $\frac{\partial S}{\partial q^\mu}$ и $\frac{\partial S}{\partial q_0^\mu}$ рассмотрим вариацию:

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t} \delta L d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial L}{\partial q^\mu} \delta q^\mu + \frac{\partial L}{\partial v^\mu} \delta v^\mu \right) d\tau =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} (\dot{p}_\mu \delta q^\mu + p_\mu \delta \dot{q}^\mu) d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}(p_\mu \delta q^\mu) d\tau = p_\mu \delta q^\mu \Bigg|_{t_0}^{t} =$$

$$= p_\mu \delta q^\mu - p_\mu(0) \delta q^\mu(0).$$

Таким образом, имеем:

$$\frac{\partial S}{\partial q^\mu}\big(q^\mu, t; q^n(0), t_0\big) = p_\mu, \qquad \frac{\partial S}{\partial q^\mu(0)}\big(q^\mu, t; q^n(0), t_0\big) = -\, p_\mu(0).$$

С другой стороны, имеем:

$$\frac{dS}{dt} = L \quad \text{и} \qquad \frac{dS}{dt_0} = -\, L_0.$$

Итак, имеем

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \cdot \dot{q}^\mu = \frac{\partial S}{\partial t} + p_\mu \dot{q}^\mu = L = p_\mu \dot{q}^\mu - H$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H.$$

Аналогично,

$$\frac{dS}{dt_0} = \frac{\partial S}{\partial t_0} + \frac{\partial S}{\partial q^\mu(0)} \cdot \dot{q}^\mu(0) = \frac{\partial S}{\partial t_0} - p_\mu(0)\dot{q}^\mu(0) = -L_0 = -p_\mu(0)\dot{q}^\mu(0) + H_0$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial t_0} = H_0.$$

Таким образом, получаем

$$dS = p_\mu dq^\mu - Hdt - p_\mu(0)dq^\mu(0) + H_0 dt_0.$$

В итоге имеем четыре функции действия:

$$dS_1(q, q_0.t, t_0) = p_\mu dq^\mu - p_\mu(0)dq^\mu(0) - Hdt + H_0 dt_0$$

$$dS_2(q, q_0.t, t_0) = p_\mu dq^\mu + q^\mu(0)dp_\mu(0) - Hdt + H_0 dt_0$$

$$dS_3(q, q_0.t, t_0) = -q^\mu dp_\mu - p_\mu(0)dq^\mu(0) - Hdt + H_0 dt_0$$

$$dS_4(q, q_0.t, t_0) = -q^\mu dp_\mu + q^\mu(0)dp_\mu(0) - Hdt + H_0 dt_0,$$

где четыре функции действия S_1, S_2, S_3, S_4 связаны между собой следующими соотношениями:

$$S_1(q, t; q_0, t_0) = S_1(q, t; q_0, t_0),$$

$$S_2(q, t; q_0, t_0) = S_1(q, t; q_0, t_0) + p_\mu(0)q^\mu(0),$$

$$S_3(q, t; q_0, t_0) = S_1(q, t; q_0, t_0) - p_\mu q^\mu,$$

$$S_4(q, t; q_0, t_0) = S_1(q, t; q_0, t_0) - p_\mu q^\mu + p_\mu(0)q^\mu(0).$$

Используя равенства

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q, p, t) \quad \text{и} \qquad \frac{\partial S}{\partial q^\mu} = p_\mu,$$

получаем уравнение Гамильтона–Якоби

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + H\Big(q^\mu, \frac{\partial S}{\partial q^\nu}, t\Big) = 0.}$$

Итак, введение функции действия

$$S=\int\limits_{t_0}^{t} L d\tau$$

позволяет свести механику Лагранжа–Гамильтона, в основании которой лежит
n уравнений второго порядка — уравнений Лагранжа,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\mu}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^{\mu}}=0$$

или $2n$ уравнений первого порядка — система канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_{\mu}=-\frac{\partial H}{\partial q^{\mu}} \qquad \text{и} \qquad \dot{q}^{\mu}=\frac{\partial H}{\partial p_{\mu}}$$

к механике Гамильтона–Якоби, основании которой лежит одно уравнение в частных производных — уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\Big(q^{\mu},\frac{\partial S}{\partial q^{\nu}},t\Big)=0.$$

Получим это уравнение независимым путём как следствие существования на двух множествах $\underline{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ аддитивной физической структуры ранга $(2n+4,2n+4)$.

Согласно theorema egregium Михайличенко в этом случае имеется единственное решение:
верификатор и репрезентатор этого решения имеют следующий вид:

$$\overset{2(n+1)+1}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\ldots\underline{i}_{2n+4};\overline{k}_1\ldots\overline{k}_{2n+4}}\big(\overset{2(n+1)}{w}\big)=0$$

$$\overset{2(n+1)}{w}{}_{\underline{i}\overline{k}}=\overline{s}(k)+x_{\mu}(i)x^{\mu}(k)+x_{n+1}(i)x^{n+1}(k)+\xi_{\nu}(i)\xi^{\nu}(k)+\xi_{n+1}(i)\xi^{n+1}(k)+\underline{s}(i).$$

Наложим первое дополнительное условие — будем считать скрытый параметр $\overline{s}$ произвольной функцией контравариантных координат:

$$x^1,\ldots,x^n,x^{n+1},\xi^1,\ldots,\xi^n,\xi^{n+1},$$

а скрытый параметр $\underline{s}$ – произвольной функцией ковариантных координат:

$$x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\xi_1,\ldots,\xi_n,\xi_{n+1},$$

то есть

$$\overline{s}=A^{00}(x^{\mu},x^{n+1},\xi^{\nu},\xi^{n+1})$$

$$\underline{s}=-A^{11}(x_{\mu},x_{n+1},\xi_{\nu},\xi_{n+1}).$$

Итак, имеем следующее выражение для репрезентатора: $\overset{2(n+1)}{w}{}_{\underline{i}\overline{k}}$

$$\overset{2(n+1)}{w}{}_{\underline{i}\overline{k}}=A^{00}\big(x^{\mu}(k),x^{n+1}(k),\xi^{\nu}(k),\xi^{n+1}(k)\big)+x_{\mu}(i)x^{\mu}(k)+x_{n+1}(i)x^{n+1}(k)+$$
$$+\xi_{\nu}(i)\xi^{\nu}(k)+\xi_{n+1}(i)\xi^{n+1}(k)-A^{11}\big(x_{\mu}(k),x_{n+1}(k),\xi_{\nu}(k),\xi_{n+1}(k)\big).$$

Наложим второе дополнительное условие — условие рефлексии:

$$\overset{2(n+1)}{w}{}_{\underline{i}\bar{i}} = 0.$$

В результате получим следующее соотношение, связывающее между собой два дуально сопряжённых сакральных потенциала A^{00} и A^{11} :

$$A^{00}(x^\mu, x^{n+1}, \xi^\nu, \xi^{n+1}) + x_\mu x^\mu + x_{n+1}x^{n+1} + \xi_\nu \xi^\nu + \xi_{n+1}\xi^{n+1} - \\ - A^{11}(x_\mu, x_{n+1}, \xi_\nu, \xi_{n+1}) = 0. \quad (4)$$

После дифференцирования этого равенства получаем:

$$\left(\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu} + x_\mu\right) dx^\mu + \left(\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu} + \xi_\nu\right) d\xi^\nu + \left(\frac{\partial A^{00}}{\partial x^{n+1}} + x_{n+1}\right) dx^{n+1} + \\ + \left(\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^{n+1}} + \xi_{n+1}\right) d\xi^{n+1} + \left(-\frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu} + x^\mu\right) dx_\mu + \left(-\frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu} + \xi^\nu\right) d\xi_\nu + \\ + \left(-\frac{\partial A^{11}}{\partial x_{n+1}} + x^{n+1}\right) dx_{n+1} + \left(-\frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_{n+1}} + \xi^{n+1}\right) d\xi_{n+1} = 0. \quad (5)$$

Чтобы соотношение (4) имело какой-либо смысл и представляло собой тождество относительно всех переменных, необходимо положить:

$$\begin{aligned} x^\nu &= x^\mu(x_\mu, x_{n+1}, \xi_\nu, \xi_{n+1}) \\ \xi^\nu &= \xi^\mu(x_\mu, x_{n+1}, \xi_\nu, \xi_{n+1}) \\ x^{n+1} &= x^{n+1}(x_\mu, x_{n+1}, \xi_\nu, \xi_{n+1}) \\ \xi^{n+1} &= \xi^{n+1}(x_\mu, x_{n+1}, \xi_\nu, \xi_{n+1}). \end{aligned} \quad (6)$$

Если в качестве функций (5) принять

$$x^\mu = \frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu}(x_\mu, x_{n+1}; \xi_\nu, \xi_{n+1}, \quad \xi^\mu = \frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\mu}(x_\mu, x_{n+1}; \xi_\nu, \xi_{n+1},$$

$$x^{n+1} = \frac{\partial A^{11}}{\partial x_{n+1}}(x_\mu, x_{n+1}; \xi_\nu, \xi_{n+1}, \quad \xi^{n+1} = \frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_{n+1}}(x_\mu, x_{n+1}; \xi_\nu, \xi_{n+1},$$

то равенство (5) примет вид:

$$\left(\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu} + x_\mu\right) dx^\mu + \left(\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu} + \xi_\nu\right) d\xi^\nu + \left(\frac{\partial A^{00}}{\partial x^{n+1}} + x_{n+1}\right) dx^{n+1} + \\ + \left(\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^{n+1}} + \xi_{n+1}\right) d\xi^{n+1} = 0.$$

Так как $dx^\mu, d\xi^n, dx^{n+1}, d\xi^{n+1}$ независимы, то имеют место следующие $2(n+1)$ соотношений, связывающих между собой $4(n+1)$ переменных:

$$x^\mu, x^{n+1}; \xi^\nu, \xi^{n+1}; x_\mu, x_{n+1}; \xi_\nu, \xi_{n+1}$$

$$\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu}(x^\mu, x^{n+1}; \xi^\nu, \xi^{n+1}) = -x_\mu$$

$$\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu}(x^\mu, x^{n+1}; \xi^\nu, \xi^{n+1}) = -\xi_\nu$$

$$\frac{\partial A^{00}}{\partial x^{n+1}}(x^\mu, x^{n+1}; \xi^\nu, \xi^{n+1}) = -x_{n+1}$$

$$\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^{n+1}}(x^\mu, x^{n+1}; \xi^\nu, \xi^{n+1}) = -\xi_{n+1}.$$

Механика Гамильтона–Якоби возникает в Теории физических структур как результат существования сакральной симметрии, если придать переменным

$$\begin{array}{ll} x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}; & \xi^1, \ldots, \xi^n \xi^{n+1}; \\ x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}; & \xi_1, \ldots, \xi_n \xi_{n+1} \end{array}$$

и сакральному потенциалу $A^{00}(x^\mu, x^{n+1}; \xi^\nu, \xi^{n+1})$ следующую физическую интерпретацию:

$x^1, \ldots, x^n = q^1, \ldots, q^n$ — обобщённые координаты,
$x^{n+1} = t$ — текущее время,
$-x_1, \ldots, -x_n = p_1, \ldots, p_n$ — обобщённые импульсы,
$x_{n+1} = H(q, p, t)$ — функция Гамильтона;

$\xi^1, \ldots, \xi^n = q^1(0), \ldots, q^n(0)$ — начальные значения обобщённых координат,
$\xi^{n+1} = t_0$ — начальный момент времени,
$\xi_1, \ldots, \xi_n = p_1(0), \ldots, p_n(0)$ — начальные значения обобщённых импульсов,
$-\xi_{n+1} = H(q_0, p_0, t)$ — функция Гамильтона в начальный момент времени.

$$A^{00}(x^\mu, x^{n+1}, \xi^\nu, \xi^{n+1}) = S_1\big(q^\mu, q^\nu(0), t, t_0\big).$$

Заметим, что существенным третьим дополнительным условием является требование

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= H = H(q^\mu, p_\nu, t) \\ -\xi_{n+1} &= H_0 = H(q^\mu(0), p_\nu(0), t). \end{aligned}$$

В новых обозначениях система $2(n+1)$ уравнений, связывающих между собой $4(n+1)$ переменных,

$$\begin{array}{ll} q^1, \ldots, q^n, t; & q^1(0), \ldots, q^n(0), t_0 \\ p_1, \ldots, p_n, H; & p_1(0), \ldots, p_n(0), H(0), \end{array}$$

имеет следующий вид:

$$\frac{\partial S_1}{\partial q^\mu}(q^\mu, q^\nu(0), t, t_0) = p_\mu, \tag{7}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial q^\mu(0)}(q^\mu, q^\nu(0), t, t_0) = -p_\mu(0), \tag{8}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t}(q^\mu, q^\nu(0), t, t_0) = -H(q^\mu, p_\nu, t), \tag{9}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t_0}(q^\mu, q^\nu(0), t, t_0) = H\big(q^\mu(0), p_\nu(0), t_0\big). \tag{10}$$

Если известна функция $S_1(q^\mu, q^\nu(0), t, t_0)$, то из n уравнений (8) находим

$$q^\mu = q^\mu\big(t, t_0, q(0), p(0)\big),$$

а затем из n уравнений (8) находим:

$$p_\mu = p_\mu\big(t, t_0, q(0), p(0)\big).$$

Перепишем равенства (7) и (8) в виде:

$$p_\mu = \frac{\partial S}{\partial q^\mu}(q, t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q^\mu, p_\nu, t) = 0$$

и, в конце концов, получаем уравнение Гамильтона–Якоби относительно неизвестной функции $S(q^1, \ldots, q^\nu, t)$:

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t}(q^1, \ldots, q^n, t) + H\Big(q^1, \ldots, q^n, \frac{\partial S}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q^n}, t\Big)} \tag{11}$$

В данной ситуации основную роль играет не общий интеграл уравнения (11), а так называемый полный интеграл; так называется решение уравнения (1), содержащее столько независимых произвольных постоянных, сколько имеется независимых переменных

$$S = S(t, q^1, \ldots, q^n; \alpha_1 \ldots, \alpha_n) + \alpha_0.$$

Литература к Примеру 18

[1]. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика. (Серия "теоретическая физика" том. 1), М., 1973 г., С. 173.

Новосибирский государственный университет, где создавалась Теория физических структур

Пример 19. Канонические преобразования

Рассмотрим систему канонических уравнений Гамильтона:

$$
\begin{aligned}
\dot p_\mu &= -\frac{\partial H}{\partial q^\mu}(q^\nu, p_\nu, t),\\
\dot q_\mu &= \frac{\partial H}{\partial p^\mu}(q^\nu, p_\nu, t).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Каким должно быть преобразование старых переменных $q^1, \ldots, q^n$; $p_1, \ldots, p_n$ к новым $Q^1, \ldots, Q^n$; $P_1, \ldots, P_n$

$$
\begin{aligned}
q^\mu &= q^\mu(Q^\mu, P_\nu, t)\\
p_\mu &= p_\mu(Q^\mu, P_\nu, t),
\end{aligned}
$$

сохраняющее вид уравнений (1), то есть переводящее систему уравнений (1) в систему уравнений

$$
\begin{aligned}
\dot P_\mu &= -\frac{\partial K}{\partial Q^\mu}(Q^\mu, P_\nu, t),\\
\dot Q^\mu &= \frac{\partial K}{\partial P_\nu}(Q^\mu, P_\nu, t)\ ?
\end{aligned} \tag{2}
$$

Такие преобразования называются **каноническими**. Оказывается, что в основании канонических преобразований лежит рассмотренная выше общая теория сакральных потенциалов:

$$A^{00}(x^\mu, \xi^\nu),\ A^{01}(x^\mu, \xi_\nu),\ A^{10}(x_\mu, \xi^\nu),\ A^{11}(x_\mu, \xi_\nu).$$

Эти потенциалы порождают систему $4n + 4n$ дуально сопряжённых уравнений, связывающих между собой $4n$ переменных:

$$
\begin{array}{cc}
x^1, \ldots, x^n; & \xi^1, \ldots, \xi^n\\
x_1, \ldots, x_n; & \xi_1, \ldots, \xi_n :
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi^\nu) = -x_\mu & \dfrac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu}(x^\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu\\[2ex]
\dfrac{\partial A^{01}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi_\nu) = -x_\mu & \dfrac{\partial A^{01}}{\partial \xi_\nu}(x^\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu\\[2ex]
\dfrac{\partial A^{10}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi^\nu) = x^\mu & \dfrac{\partial A^{10}}{\partial \xi^\nu}(x_\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu\\[2ex]
\dfrac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi_\nu) = x^\mu & \dfrac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu}(x_\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu
\end{array}
$$

если потенциалы A_{00}, A^{01}, A^{10}, A^{11} связаны между собой следующими соотношениями:

$$A^{00}(x^\mu,\xi^\nu) = A^{00}(x^\mu,\xi^\nu)$$

$$A^{01}(x^\mu,\xi_\nu) = A^{00}(x^\mu,\xi^\nu) + \xi_\nu\xi^\nu$$

$$A^{10}(x_\mu,\xi^\nu) = A^{00}(x^\mu,\xi^\nu) + x_\mu x^\mu$$

$$A^{11}(x_\mu,\xi_\nu) = A^{00}(x^\mu,\xi^\nu) + x_\mu x^\mu + \xi_\nu\xi^\nu.$$

Канонические преобразования

$$q^\mu = q^\mu(Q^\mu, P_\nu, t)$$

$$p_\nu = p_\nu(Q^\mu, P_\nu, t)$$

возникают из теории сакральных потенциалов, если придать переменным x^μ , x_μ , ξ^ν , ξ_ν следующий физический смысл:

$$\begin{array}{ll} x^1,\dots,x^n = q^1,\dots,q^n; & \xi^1,\dots,\xi^n = Q^1,\dots,Q^n \\ x_1,\dots,x_n = -p_1,\dots,-p_n; & \xi_1,\dots,\xi_n = P_1,\dots,P_n \end{array}$$

и ввести следующие четыре производящие функции:

$$F_1(q^\mu, Q^\nu, t) = A^{00}(x^\mu,\xi^\nu)$$

$$F_2(q^\mu, P_\nu, t) = A^{01}(x^\mu,\xi_\nu)$$

$$F_3(p_\mu, Q^\nu, t) = A^{10}(x_\mu,\xi^\nu)$$

$$F_4(p_\mu, P_\nu, t) = A^{11}(x_\mu,\xi_\nu).$$

В этом случае одно и тоже каноническое преобразование может быть получено одним из следующих четырёх вариантов:
первый вариант:

$$\frac{\partial F_1}{\partial q^\mu}(q^\mu, Q^\nu, t) = p_\mu; \qquad \frac{\partial F_1}{\partial Q^\nu}(q^\mu, Q^\nu, t) = -P_\nu; \tag{3}$$

второй вариант:

$$\frac{\partial F_2}{\partial q^\mu}(q^\mu, P_\nu, t) = p_\nu; \qquad \frac{\partial F_2}{\partial P_\nu}(q^\mu, P_\nu, t) = Q^\nu; \tag{4}$$

третий вариант

$$\frac{\partial F_3}{\partial p_\mu}(p_\mu, Q^\nu, t) = -q^\mu; \qquad \frac{\partial F_3}{\partial Q^\nu}(p_\mu, Q^\nu, t) = -P_\nu; \tag{5}$$

четвёртый вариант:

$$\frac{\partial F_4}{\partial p_\mu}(p_\mu, P_\nu, t) = -q^\mu; \qquad \frac{\partial F_4}{\partial P_\nu}(p_\mu, P_\nu, t) = Q^\nu, \tag{6}$$

если четыре производящие функции

$$F_1(q^\mu, Q^\nu, t), \qquad F_2(q^\mu, P_\nu, t), \qquad F_3(p_\mu, Q^\nu, t), \qquad F_4(p_\mu, P_\nu, t)$$

связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
F_1(q^m, Q^\nu, t) &= F_1(q^m, Q^\nu, t)\\
F_2(q^\mu, P_\nu, t) &= F_1(q^m, Q^\nu, t) + P_\nu Q^\nu\\
F_3(p_\mu, Q^\nu, t) &= F_1(q^m, Q^\nu, t) - p_\mu q^\mu\\
F_4(p_\mu, P_\nu, t) &= F_1(q^m, Q^\nu, t) - p_\mu q^\mu + P_\nu Q^\nu.
\end{aligned}$$

Докажем, что канонические преобразования, заданные в неявном виде каждым из четырёх вариантов (3)–(6), приводят к новой системе канонических уравнений (2).

Из равенств (3)–(6) следуют, соответственно, следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p_\mu}{\partial Q^\nu} = -\frac{\partial P_\nu}{\partial q^\mu}; \qquad && \frac{\partial p_\mu}{\partial P_\nu} = \frac{\partial Q^\nu}{\partial q^\mu};\\
&\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\nu} = \frac{\partial P_\nu}{\partial p_\mu}; \qquad && \frac{\partial q^\mu}{\partial P_\nu} = -\frac{\partial Q^\nu}{\partial p_\mu}.
\end{aligned} \tag{7}$$

В качестве новой функции Гамильтона $K(Q^\mu, P_\nu, t)$ возьмём одну из следующих четырёх функций:
первый вариант:

$$K_1(Q, \overline{P}, t, \overline{c}) = H\big(q(Q, \overline{P}, t), p(Q, \overline{P}, t), t\big) + \frac{\partial F_1}{\partial t}(\overline{c}, Q^\nu, t); \tag{8}$$

второй вариант:

$$K_2(\overline{Q}P, t, \overline{c}) = H\big(q(\overline{Q}, P, t), p(\overline{Q}, P, t), t\big) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(\overline{c}, P_\nu, t); \tag{9}$$

третий вариант:

$$K_3(Q, \overline{P}, t, \underline{c}) = H\big(q(Q, \overline{P}, t), p(Q, \overline{P}, t), t\big) + \frac{\partial F_3}{\partial t}(\underline{c}, Q^\nu, t); \tag{10}$$

четвёртый вариант:

$$K_4(\overline{Q}, P, t, \underline{c}) = H\big(q(\overline{Q}, P, t), p(\overline{Q}, P, t), t\big) + \frac{\partial F_4}{\partial t}(\underline{c}, P_\nu, t), \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}
Q^\mu &= Q^\mu(q, p, t); \qquad & \overline{Q} &= \overline{Q}^\mu(q, p);\\
P_\nu &= P_\nu(q, p, t); \qquad & \overline{P}_\nu &= \overline{P}_\nu(q, p),
\end{aligned}$$

где $\overline{c} = c^1, \ldots, c^n$ и $\underline{c} = c_1, \ldots, c_n$ – два набора произвольных констант.

Учитывая соотношение (7) и им эквивалентные

$$\frac{\partial p_\mu}{\partial \overline{Q}^\nu} = -\frac{\partial \overline{P}_\nu}{\partial q^\mu}, \qquad \frac{\partial p_\mu}{\partial \overline{P}_\nu} = \frac{\partial \overline{Q}^\nu}{\partial q^\mu},$$

$$\frac{\partial q^\mu}{\partial \overline{Q}^\nu} = \frac{\partial \overline{P}_\nu}{\partial p_\mu}, \qquad \frac{\partial q^\mu}{\partial \overline{P}_\nu} = -\frac{\partial \overline{Q}^\nu}{\partial p_\mu}.$$

легко получаем непосредственным дифференцированием равенств (8)–(11) следующие уравнения:

$$\frac{\partial K_1}{\partial Q^\mu}(Q, \overline{P}, y, \overline{c}) = -\dot{P}_\mu; \qquad \frac{\partial K_1}{\partial \overline{P}_\mu}(Q, \overline{P}, t, \overline{c}) = \dot{\overline{Q}}^\mu;$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial \overline{Q}^\mu}(\overline{Q}, P, t, \overline{c}) = -\dot{\overline{P}}_\mu; \qquad \frac{\partial K_2}{\partial P_\mu}(Q, \overline{P}, t, \overline{c}) = \dot{Q}^\mu;$$

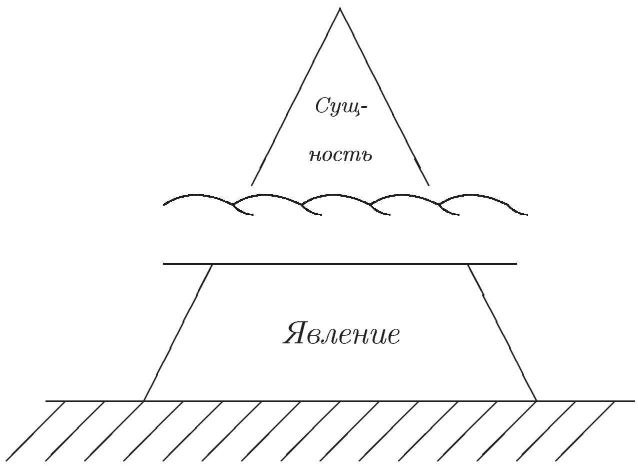
$$\frac{\partial K_3}{\partial Q^\mu}(Q, \overline{P}, y, \underline{c}) = -\dot{P}_\mu; \qquad \frac{\partial K_3}{\partial \overline{P}_\mu}(Q, \overline{P}, t, \underline{c}) = \dot{\overline{Q}}^\mu;$$

$$\frac{\partial K_4}{\partial \overline{Q}^\mu}(\overline{Q}, P, t, \underline{c}) = -\dot{\overline{P}}_\mu; \qquad \frac{\partial K_4}{\partial P_\mu}(Q, \overline{P}, t, \underline{c}) = \dot{Q}^\mu.$$

Итак, в конечном итоге система канонических уравнений Гамильтона в новых переменных Q^μ, P^ν имеет вид:

$$\frac{\partial K}{\partial Q^\mu}(Q, P, t) = -\dot{P}_\mu$$

$$\frac{\partial K}{\partial P_\mu}(Q, P, t) = \dot{Q}^\mu$$



Литература к Примеру 19

[1]. *Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М.* Механика. (Серия "Теоретическая физика" том. 1), М., 1973 г., С. 173.

Московский государственный университет

А вот и дом, куда он так летел –
Старинное святилище науки.
Московских зодчих золотые руки
Здесь положили прочности предел.

Пример 20. Теория размерности

То, что в первую очередь отличает теоретическую физику от математики, это широкое использование *физических величин* — длины, времени, скорости, ускорения, температуры, силы, массы, энергии и т.д. и соответствующих *единиц* — метра, секунды, метра в секунду, метра на секунду в квадрате, кельвина, ньютона, килограмма, джоуля и т.д.

Что же такое физическая величина?

Любая физическая величина зависит прежде всего от самогó физического объекта i и от соответствующей измерительной процедуры σ, позволяющей выявить те или иные характеристики этого физического объекта.

Обычно, имея перед собой простейшую, наглядную операцию измерения длины стержня, трактуют процедуру измерения любой физической величины как процедуру "откладывания" эталонного физического объекта e на измеряемом объекте i. Эту операцию ещё можно как-то представить и осуществить в случае измерения длины, сложнее — площади, и уже с большим трудом — объёма.

Но что значит "отложить" эталонное состояние на измеряемое состояние того или иного физического тела в случае измерения его температуры, плотности или намагниченности? Как, например, "отложить" один градус Кельвина на состояние нагретого тела?

Дело в том, что при более строгом рассмотрении процедуры измерения с точки зрения теории физических структур выясняется, что универсальный алгоритм измерения любой физической величины не имеет ничего общего с наглядным "откладыванием" эталона.

Процесс измерения физической величины предполагает существование целого множества

$$\mathfrak{S} = \{\sigma, \lambda, \ldots\},$$

различных по своей конструкции приборов с различными равномерными шкалами, предназначенных для измерения одной и той же характеристики рассматриваемого физического объекта i.

Физической величиной называется числовая функция двух нечисловых переменных:

физического объекта $i \in \mathfrak{M}$

и соответствующего измерительного прибора $\sigma \in \mathfrak{S}$, то есть

$$a : \mathfrak{S} \times \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\sigma, i) \longmapsto a_\sigma(i).$$

Другими словами, произвольно выбранный прибор σ сопоставляет каждому физическому объекту i число $a_\sigma(i)$, называемое физической величиной физического объекта i.

Рассмотрим несколько конкретных примеров:

Между множеством физических объектов $\mathfrak{M}$ и множеством соответствующих измерительных приборов $\mathfrak{S}$ имеют место вполне определённые устойчивые отношения, находящие своё выражение в факте существования простейшей мультипликативной физической структуры ранга (2,2). Это значит, что четыре физические величины:

$$a_\sigma(i),\ a_\sigma(k) \qquad \text{и} \qquad a_\lambda(i),\ a_\lambda(k),$$

относящиеся к двум различным физическим объектам i и k и полученные в результате двух измерительных операций σ и λ, связаны между собой простейшим соотношением:

$$\begin{vmatrix} a_\sigma(i) & a_\sigma(k) \\ a_\lambda(i) & a_\lambda(k) \end{vmatrix} = a_\sigma(i)\,a_\lambda(k) - a_\sigma(k)\,a_\lambda(i) = 0$$

или

$$\frac{a_\sigma(i)}{a_\sigma(k)} = \frac{a_\lambda(i)}{a_\lambda(k)} = \ldots = a(k,\,i),$$

то есть отношение двух физических величин $\frac{a_\sigma(i)}{a_\sigma(k)} = a(k,\,i)$ не зависит от выбора измерительного прибора σ.

Таким образом, имеем

$$a_\sigma(i) = a_\sigma(k)\cdot a(k,\,i). \tag{1}$$

Если среди всех физических объектов, принадлежащих к множеству $\mathfrak{M}$, выбрать один объект

$$e \in \mathfrak{M}$$

и назвать его *эталонным* физическим объектом, то равенство (1) приобретёт вид:

$$a_\sigma(i) = a_\sigma(e)\cdot a(e,\,i). \tag{2}$$

Итак, любая физическая величина $a_\sigma(i)$ представляет собой произведение двух числовых функций $a_\sigma(e)$ и $a(e,\,i)$.

Первая числовая функция $a_\sigma(e)$ представляет собой физическую величину физического объекта e, принятого в качестве эталона. По традиции эта числовая функция называется *"единицей физической величины"* и обозначается так:

$$a_\sigma(e) = [\,a\,]_\sigma.$$

Она как бы вбирает в себя "ненужную" переменную, произвольную измерительную операцию σ, делая тем самым величину $a(e,\,i)$ инвариантной относительно выбора операции σ.

По традиции числовая функция $a(e,\,i)$ называется *численным значением физического объекта i при выборе в качестве эталона физического объекта e* и обозначается так:

$$a(e,\,i) = \{\,a\,\}.$$

Таким образом, равенство (2) в традиционных обозначениях выглядит следующим образом:

$$a_\sigma = [\,a\,]_\sigma\cdot\{\,a\,\}. \tag{3}$$

В случае, если эталонный физический объект e –"сантиметр"– и $a\,(\textit{см},\, i) \,=\, 12$, то равенство (3) примет знакомый ещё из средней школы вид:

$$\ell_\sigma \,=\, \textit{см}_\sigma \cdot 12 \qquad \text{или} \qquad \ell \,=\, 12\,\textit{см}.$$

По традиции, идущей от наглядной процедуры измерения длины стержня путём откладывания на нём стержня, принятого за эталон, считается, что единица физической величины совпадает с соответствующим физическим объектом, принятым в качестве эталона. Но если это так, то единица скорости должна представлять собой частное от деления отрезка единичной длины на промежуток времени между двумя фиксированными событиями, принятыми за эталон, напоминая при этом нечто несуразное, типа частного от деления пирога на сапоги.

Итак, установление числовой природы физической величины $a_\sigma\,(i)$ и её единицы $a_\sigma\,(e)$ снимает многие проблемы, возникающие при рассмотрении уравнений, описывающих физические законы, а именно:

• отпадает необходимость введения "именованных чисел", имеющих якобы какую-то особую нечисловую природу;

• делает возможным осуществлять с единицами физических величин обычные операции — умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня [83].

• позволяет правильно сформулировать и написать выражение для физического закона, в виде, инвариантном относительно выбора эталонов e и процедуры измерения σ .

Сакральная формулировка теории размерности

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{2}{K}{}^{00}_{\mu\nu;\,ik}(\overset{1}{a}) \equiv 0}}$$

[83]Что же касается операций сложения и вычитания, то в них, в силу специфики физических величин, просто нет необходимости. Дело в том, что физические величины возникают в результате существования особых отношений между множеством физических объектов $\mathfrak{M}$ и множеством измерительных приборов $\mathfrak{S}$, в основании которых лежит *мультипликативная* физическая структура ранга (2,2), обеспечивающая существование инвариантов $a\,(e,\,i) \,=\, \frac{a_\sigma\,(i)}{a_\sigma\,(e)} \,=\, \ldots \,=\, \frac{a_\lambda\,(i)}{a_\lambda\,(e)}$, не зависящих от случайного выбора той или иной измерительной операции σ . Другими словами, физическая величина, имея числовую природу, обладает ещё одним важным свойством: *отношение* двух физических величин инвариантно относительно выбора конкретной измерительной операции.

$$\boldsymbol{\overset{1}{a}_{\mu i} = \xi(\mu)_1\, x^1(i) = a_\mu(e) a(e,i)}$$

								$\cdot\ \cdot\ \cdot$
						$\overset{4}{K}{}^{01}$	$\overset{4}{K}{}^{11}$	
						$\overset{4}{K}{}^{00}$	$\overset{4}{K}{}^{10}$	
				$\overset{3}{K}{}^{01}$	$\overset{3}{K}{}^{11}$			
		$\overset{2}{K}{}^{02}$		$\overset{3}{K}{}^{00}$	$\overset{3}{K}{}^{10}$			
		$\overset{2}{K}{}^{01}$	$\overset{2}{K}{}^{11}$					
		$\boxed{\overset{2}{K}{}^{00}}$	$\overset{2}{K}{}^{10}$	$\overset{2}{K}{}^{20}$				
$\overset{1}{K}{}^{01}$	$\overset{1}{K}{}^{11}$							
$\overset{1}{K}{}^{00}$	$\overset{1}{K}{}^{10}$							

Место физической структуры, выражающей сущность теории размерности, среди всех возможных физических структур.

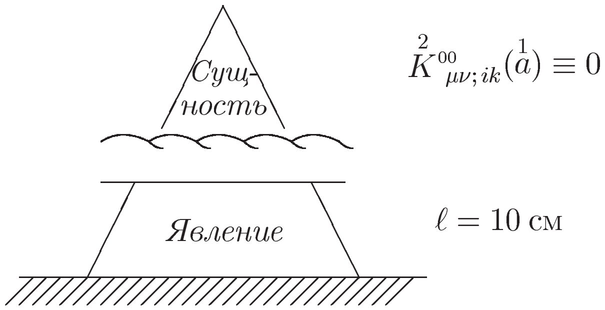
Итак, сущность теории размерности состоит в существовании сакральных отношений между множеством измерительных приборов $\underline{\mathfrak{S}}$ и множеством физических объектов $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждый измерительный прибор μ является **вектором** сакрального одномерного векторного пространства, а каждый физический объект i является **вектором** другого сакрального одномерного векторного пространства.

Другими словами, теория размерности является сакральной вектор-векторной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.

Сущность теории размерности состоит в равенстве нулю скалярного произведения двухвекторного корта измерительных приборов $\langle\,\mu\,\nu\,|$ на двухвекторный корт проводников $|\,i\,k\,\rangle$, объёмы каждого из которых тождественно равны нулю.

Другими словами, **сущность теории размерности состоит в наличии таких отношений между 2-векторным кортом измерительных приборов $\langle\,\mu\,\nu\,|$ и 2-векторным кортом физических объектов $|\,i\,k\,\rangle$, при которых имеет место физическая структура рода:**

$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\mu\nu;\,ik}(\overset{1}{a}) = V(\mu,\nu)_{1;0}\ V^{1;0}(i,k) \equiv 0$$



Явление и сущность теории размерности.

Бесчисленное множество других примеров приходит мне в голову, но мы должны остановиться на этом и сохранить наше повествование в разумных пределах, чтобы не уподобиться тем, о ком трагик Агафон сказал:

Им побочные дела – наиважнейшие,

А настоящие труды – лишь между делом. [1].

[1]. *Климент Александрийский.* Строматы. Том II, (книги 4 - 5). (перевод с древнегреческого Е.В.Афонасина[84]) Санкт-Петербург, 2003.

Изд-во Олега Абышко, С. 224 - 225.

[84] Удивительна и необычна научная карьера самогó переводчика и комментатора "Стромат", доктора философских наук, магистра искусств, старшего научного сотрудника Института философии и права СО РАН, преподавателя НГУ – моего ученика **Евгения Афонасина**. Он окончил физический факультет НГУ, но не стал физиком. В своей дипломной работе, посвящённой математическому основанию Теории физических структур, он не смог преодолеть возникших математических трудностей, однако в этой работе он показал себя как мыслитель,

Брюссель. *"Атомиум" – символ веры в научно-технический прогресс.*

поставивший перед собой чрезвычайно трудную задачу – ответить на вопрос "Что есть Истина?". За время обучения в аспирантуре Новосибирского университета, Центрального Европейского (Будапешт) университета, а затем Оксфордского университета, за время работы в Институте классических исследований Бостонского университета и в Научном центре византистики Dumbarton Oaks (Washington, USA) Евгений овладел тремя европейскими языками (английским, французским, немецким), латинским и древнегреческим и во всеоружии пропедевтических исторических и философских знаний взялся за перевод и комментарий огромной, с трудом обозримой и практически неподъёмной глыбы "Строматов" Климента Александрийского. Это поставило его в один ряд с крупнейшими современными византологами.

Область его научных интересов – история философии, классическая филология, западная традиция права, позднеантичная и раннехристианская философия (неопифагорейство, гностицизм, греческая патристика).

(См. в Приложении V отзыв о его кандидатской диссертации крупнейшего российского византолога В.В. Бычкова).