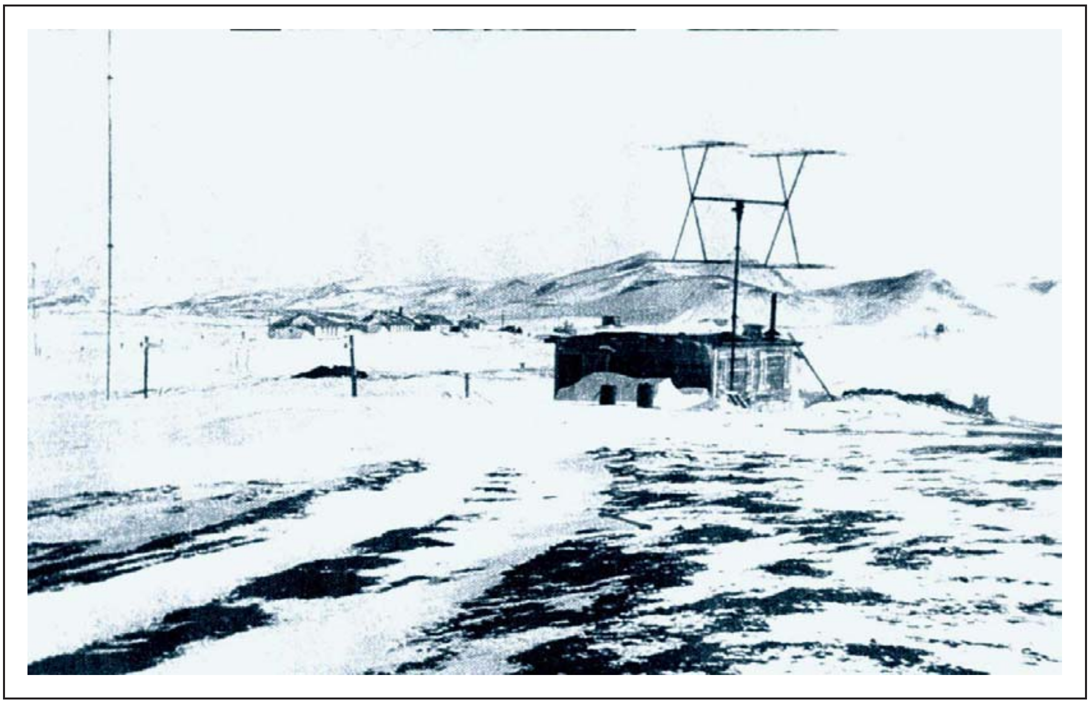
Приложение III.

Первая публикация по Теории физических структур

Когда окончательно откажутся от понятия элементарной частицы встанет вопрос, какие понятия можно было бы связать с эпитетом "фундаментальный". Конечно, не какие-то особые виды частиц, или сил, или полей, или геометрий. Фундамент реальности, к сожалению, гораздо более абстрактен. Существующие экспериментальные доказательства довольно основательно свидетельствуют в пользу идеи, что можно говорить о фундаментальных симметриях. Закон природы, лежащий в основе спектра частиц, их взаимодействий, строения и истории космоса, определяется, вероятно, некоторыми фундаментальными симметриями. (...) Поэтому можно сказать, что современное развитие физики повернулось от философии Демокрита к философии Платона [1]

— *Вернер Гейзенберг*

[1] *Гейзенберг* Сб. "Properties of matter under unusual condtions". Interscience, N.Y. — L., 1969, p.p. 7–10
Есть русский перевод: Вернер Карл Гейзенберг. "Что такое "понимание" в теоретической физике?", Природа, № **4**, 1971, с. 75–77.

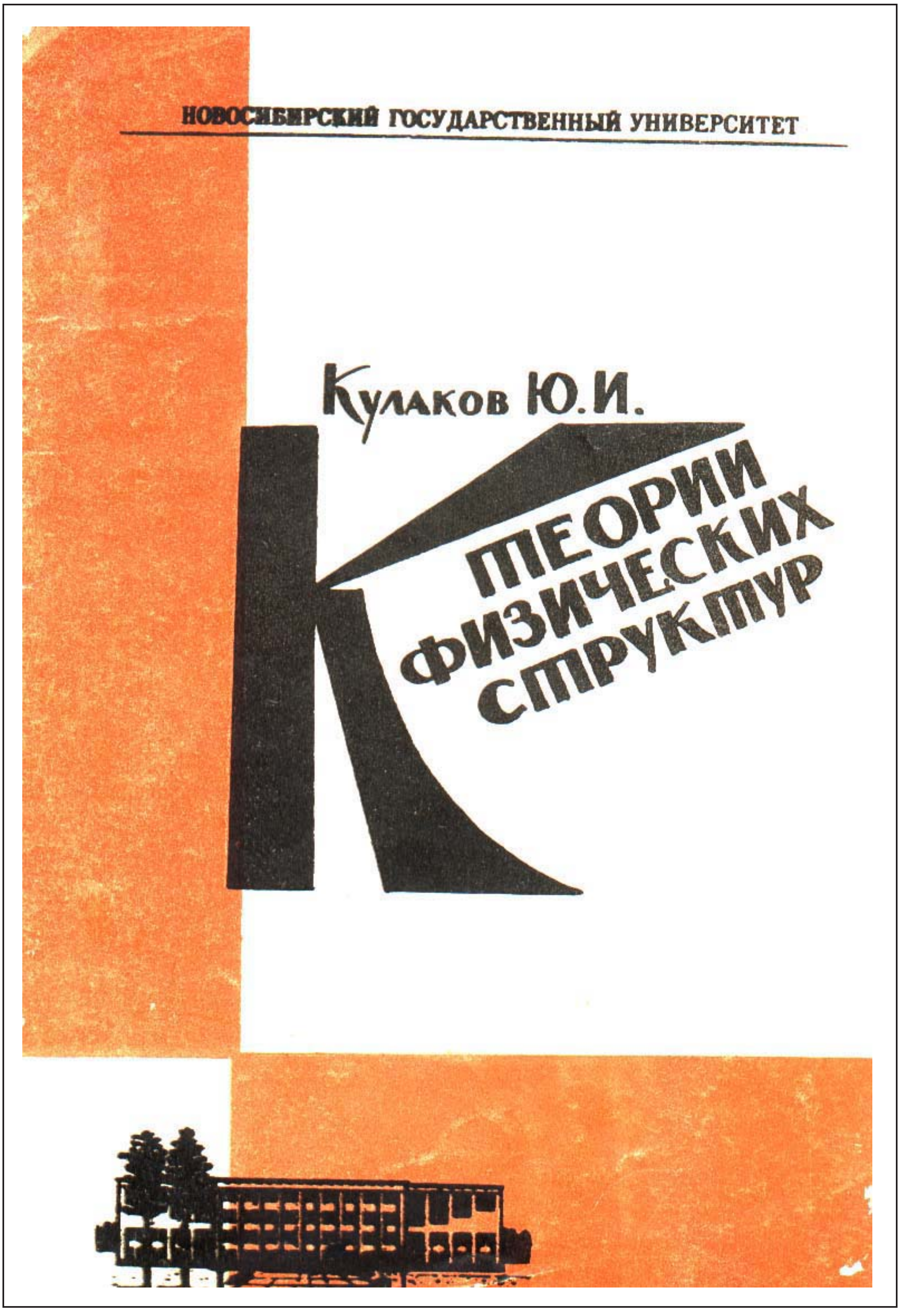


Тикси. Станция МГГ [93].

На этой станции, затерянной в безбрежном пространстве снежной пустыни Заполярья, в канун Нового 1967 года я прочитал свой первый курс лекций по Теории физических структур. Есть что-то символическое в том, что эти лекции проходили полярной ночью под беззвучные сполохи полярных сияний в ясную погоду и завывание ветра с колючим снегом во время пурги.

Моими первыми слушателями были молодые научные сотрудники и бывалые полярники. И вот теперь, спустя тридцать пять лет я с большой теплотой вспоминаю своих первых благодарных слушателей: Валю Дмитренко, Валерия Хвостенко, Володю и Наташу Пивоваровых.

[93]МГГ – Международный Геофизический Год



Обложка первого издания Теории физических структур (1968)

К теории физических структур

(Четыре лекции для студентов НГУ)

Ю.И. Кулаков

1968

г. Новосибирск

Лекция 1

Некоторые предварительные замечания о единой физической картине мира

Если вы считаете, что критика основных физических понятий может стать полем плодотворных исследований, то развивайте её всеми средствами. В этом случае вы можете напасть на след чего-то, что приведёт к новой точке зрения на природу мира.

— Артур Эддингтон.

§ 1. Исчерпали ли себя классические разделы теоретической физики?

В настоящее время[94], несмотря на серьёзные трудности в области сильных взаимодействий, теоретическая физика продолжает бурно развиваться. Особое место, по-прежнему, занимают работы по теории элементарных частиц, так как ни у кого не возникает сомнения в том, что именно здесь сосредоточены проблемы, связанные с наиболее глубокими физическими принципами.

Что же касается остальных традиционных разделов теоретической физики, ставших уже классическими, таких как механика, специальная теория относительности, термодинамика, электродинамика, квантовая механика, то интерес к ним постепенно угас и подавляющее большинство работ в этой области носит исключительно утилитарный характер.

Действительно, согласие перечисленных разделов теоретической физики с экспериментом настолько убедительно, а математический аппарат их настолько хорошо разработан, что всякая попытка пересмотреть принципиальную сторону теории с целью её улучшения, заранее кажется обречённой на неудачу. И, тем не менее, прежде чем хоронить, разумеется, со всеми подобающими почестями, многие разделы теоретической физики как исчерпавшие себя в идейном отношении, стоит ещё раз задуматься над их эвристическим содержанием.

В самом деле, ценность по-настоящему глубокой физической теории не исчерпывается её утилитарным значением – способностью связывать между собой различные известные физические явления и предсказывать новые. Последовательная физическая теория обладает ещё и эвристической ценностью – в ней заложены, часто в скрытой форме, некоторые глубокие физические принципы, которые при умелой экстраполяции за пределы данной теории могут привести

[94] Напомню, что эта первая публикация по теории физических структур была написана мною весной 1967 года.

к созданию нового формализма или стать исходным пунктом новых физических идей.

Утилитарная сторона классических теорий действительно доведена до совершенства; трудности, которые здесь имеются, носят почти исключительно математический характер. Что же касается эвристического содержания отдельных разделов теоретической физики, то даже для классических теорий эта сторона вопроса остаётся совершенно неразработанной.

Как довольно тонко подметил Дж. Синг: "Физики сравнительньно мало задумываются над тем, почему и как они делают то, что они делают, и против этого нельзя сильно возражать, так как человеческая активность подавляется самоанализом. Однако имеются случаи, когда опасность интеллектуальной путаницы больше опасности самоанализа".

§ 2. Золотой век физики и "архитектурные излишества".

Отсутствие серьёзных работ по основаниям физики объясняется отчасти трудностями, возникающими при попытке дать точную формулировку задачи, которая с одной стороны, в отличие от конкретных физических задач, связана с наиболее общими законами, присущими различным физическим теориям, а с другой, в отличие от философии, позволяла бы сформулировать эти закономерности на привычном аналитическом языке уравнений.

С подобной ситуацией в математике впервые столкнулся Эйлер при решении топологической задачи о кенигсбергских мостах. Он сразу же осознал, что она не может быть решена обычными методами геометрии, алгебры или комбинаторики, решил её, но, сообщая своё решение Карлу Элеру, писал: "Это решение, по-видимому, имеет мало отношения к математике, и мне непонятно, почему следует скорее от математика ожидать этого решения, нежели от какого-нибудь другого человека, ибо это решение подкрепляется одним только рассуждением, и нет необходимости привлекать для нахождения этого решения какие-либо законы, свойственные математике".

Короче говоря, последовательное решение проблемы оснований физики требует особой методики иследования, существенно отличной от той, которая вырабатывалась в течение длительного времени при решении конкретных задач.

Эйнштейн, как, может быть, никто из современных физиков, всю жизнь искал общие принципы, из которых путём чистой дедукции можно было бы получить картину мира. "На протяжении долгих лет, – писал он, – я всеми силами стремился придавать ясность основаниям науки и совершенствовать их".

Однако своего рода отступничеством от научной веры стало считаться всякое высказывание сомнения в совершенстве признанных трактовок теорий. В этом сказывались и факты обожествления создателей современной физики и элементы слепой веры, мешающие выявить недостатки трактовки и изложения теорий.

Так, например, построение и изложение специальной теории относительности за шестьдесят лет её существования упорно сохраняет все недостатки формального и далеко не совершенного в логическом отношении первоизложения.

Нелогичность принятого построения этой действительно простейшей из современных теорий, к стыду многочисленной армии нескольких поколений физиков, была отмечена самим же Энштейном в конце его жизни. Однако, к этому времени всеобщая вера в совершенство принятого изложения настолько укрепилась, что к замечанию самогó создателя теории отнеслись без должного внимания.

Главная же причина такого одностороннего развития теоретической физики, когда на передний план ставится утилитарная сторона дела, состоит в том, что вопрос об общих законах построения физических теорий был просто преждевременным.

Действительно, период, начавшийся созданием специальной теории относительности и современной квантовой механники и закончившийся объяснением лэмбовского сдвига и аномального магнитного момента электрона в квантовой электродинамике, по праву может быть назван “золотым веком” физики. Этот период был замечателен тем, что удивительное согласие результатов теории с экспериментом достигалось формальным решением уравнений, содержащих величины, наши знания о которых ограничены интуитивными представлениями.

Возникла любопытная ситуация: с одной стороны – совершенный математический аппарат, с другой – поверхностная интуиция, от которой нельзя избавится, когда речь заходит о фундаментальных физических понятиях, таких как длина и время, масса, энергия, электрический заряд и т.п.

В связи с этим не может не возникнуть вопрос, вполне естественный для эпохи “золотого века”: а нужны ли вообще точные определения исходных физических понятий? Не является ли стремление к логически завершённым формулировкам физических теорий своего рода “архитектурным излишеством”?

Действительно, что может дать уточнение и переосмысление исходных понятий, если уравнения теории, весь её формализм остаются без изменения? Ведь для того чтобы получать превосходное согласие выводов терии с экспериментом, нет необходимости вникать в тонкости определений длины и времени, массы и энергии, волновой функции и заряда электрона. Нужно лишь проявить достаточную изобретательность и извлечь из всемогущих уравнений нужный результат.

§ 3. Необходимость новых физических идей и унификации физических теорий.

Но “золотой век” физики кончился. Уравнения квантовой механики, теории относительности и квантовой электродинамики, по-видимому, исчерпали себя. Становится всё более очевидным, что построение теории элементарных частиц возможно лишь на базе новых уравнений, нового формализма, новых физических идей.

Но прежде чем строить новую теорию, полезно знать, как устроены старые классические теории. Но разве наши знания традиционных разделов теоретической физики являются недостаточными? Эти знания утилитарны. Они вполне достаточны для объяснения почти любого физического явления, взятого из соответствующей области, но они недостаточны для установления общих физических принципов, из которых формализм теории вытекал бы как далеко нетривиальное следствие.

“Пока мы должны признать, – писал Эйнштейн незадолго до смерти, – что не имеем для физики общей теоретической основы, которую можно было бы считать её логическим фундаментом” .

Другим немаловажным обстоятельством, требующим пересмотра существующих физических теорий с точки зрения их унификации, является проблема преподавания.

Дело в том, что изучение современной физики чрезвычайно затруднено отсутствием общей картины строение физики в целом, генерального плана, на котором каждому разделу теоретической физики было бы отведено своё, вполне определённое место.

Отсутствие же такой единой физической картины мира приводит к тому, что исходные аксиомы, лежащие в основании тех или иных разделов физики, воспринимаются как случайные, обусловленные скорее историческими причинами, нежели внутренней необходимостью, что, естественно, не может не вызвать серьёзных трудностей при попытке установить истинный характер физических закономерностей, лежащих в основании изучаемой теории.

Изучение физики требует больших усилий ещё и потому, что каждый новый раздел её связан с новыми принципами, никак не связанными с принципами предыдущих разделов, с понятиями, введение которых, как правило, основано только на интуиции, с новыми уравнениями, которые вводятся в теорию без достаточных обоснований.

Ситуация, сложившаяся в современной физике, удивительно сходна с положением дел в математике в начале XIX века. Эварист Галуа писал по этому поводу: “И учебные, и научные книги страдают одним и тем же – отсутствием чёткости изложения. Возьмите любую книгу по алгебре, учебную или научную, и вы не найдёте в ней ничего, кроме хаотического множества теорем, строгость которых представляет странный контраст с общим беспорядком. Кажется что отдельные соображения обошлись автору так дорого, что у него уже не хватило сил объединить их, и что его ум, истощённый идеями, положенными в основу труда, не в состоянии породить ещё одну мысль, которая связала бы его воедино. Если вы всё-таки встретите какой-нибудь метод, какую-нибудь связь или систему, то они обязательно оказываются фальшивыми или искусственными. Деление на разделы не обосновано, сопоставления произвольны, порядок условен. Этот недостаток ещё белее тяжёлый, чем отсутствие метода, особенно часто встречается в учебниках”.

Наконец, серьёзным недостатком существующей аксиоматики, а вместе с ней и изложения современной физики, является отсутствие в ней глубокой, принципиальной связи с экспериментом, именно благодаря которой физика и является наукой о природе. Если же эта связь завуалирована, если ей в аксиоматике отводится третьестепенное место, то изучение физики невольно сводится лишь к усвоению математического аппарата в ущерб овладению высокой культурой физического мышления.

§ 4. Является ли логическая непоследовательность неизбежным спутником физических теорий?

Итак, речь идёт о такой формулировке известных физических теорий, которая позволила бы ввести исходные физические понятия с такой же степенью строгости, какая имеет место в математике при аксиоматическом методе изложения.

Но возможно ли это? Ведь физика в отличие от математики, имеет дело не только с абстрактными схемами и понятиями, свойства которых могут быть при желании предельно строго определены соответствующими аксиомами, сколько с реальными физическими объектами, свойства которых определяются совокупностью конкретных опытных данных, полученных с помощью конкретных измерительных операций. Но именно конкретный характер измерительных операций является наиболее уязвимым местом любой физической теории, затрудняющим её аксиоматическую формулировку.

Поэтому установление взаимного соответствия между готовой математической схемой и свойствами реальных физических объектов является типичной физической задачей, от правильного решения которой зависит внутренняя непротиворечивость и логическая стройность физический теории.

Не нужно приводить много примеров, чтобы убедиться в явном несоответствии между безупречной, математически точной абстрактной системой с одной стороны и полуинтуитивным, аппелирующим к наглядности, методом введения основных физических понятий, с другой.

В самом деле, рассмотрим вопрос о таких "очевидных" понятиях как длина и время.

Начнём с длины, на основе которой вводится важное для всей физики понятие координаты.

Обычно, пытаясь дать точное определение расстояния между двумя точками, описывают известную процедуру откладывания по прямой абсолютно твёрдого отрезка. Но что такое твёрдое тело? Интуитивно мы чувствуем разницу между резиновым шнуром и стальным стержнем, но для построения логически замкнутой физической теории такой подход, естественно, не может считаться удовлетворительным.

Положение ещё более усложнится, если мы попытаемся уточнить, что следует понимать под прямой, по которой необходимо откладывать измерительный отрезок.

В самом деле, что такое прямая? Обычно отвечая на этот вопрос, говорят: прямая, по определению, реализуется натянутой нитью или лучём света. Но принять такое опрделение прямой это значит связать фундаментальные для всей физики понятия длины и координаты с весьма спецальными физическими явлениями, определить общее и фундаментальное через частное и случайное, что если и может быть в какой-то мере оправдано некоторыми интуитивными соображениями, то во всяком случае не может лечь в основу последовательной физической теории.

Аналогичные трудности возникают при определении времени. Что такое время?

Обычно, отвечая на этот вопрос, говорят о процедуре измерения, позволяющей сравнить изучаемое явление с так называемым "равномерным" процессом. Однако ясно, что сведение одного интуитивного понятия – времени, к другому – "равномерному" процессу, ничего не может изменить по существу. И здесь мы не можем избавиться от чувства неудовлетворённости, связывая фундаментальное для всей физики понятие – время, с весьма специальными физическими явлениями – движением Земли вокруг Солнца или электромагнитными процессами в резонаторе молекулярного генератора, играющими роль эталонов "равномерных" процессов.

Приведённых примеров вполне достаточно, чтобы увидеть значительный разрыв, существующий между довольно низким уровнем наших представлений об исходных физических величинах и математическим аппаратом, применяемым физикой.

По этому поводу можно было бы привести многочисленные высказывания Пуанкаре, Эйнштейна, Бора, Гейзенберга, но пожалуй самым откровенным является высказывание Дж. Синга: "О существующем в действительности неравенстве $\neq$ (– описание физических объектов в терминах физических операций, – описание физических объектов на языке математики – Ю.К.) лучше не говорить громче чем шёпотом, ибо это чрезвычайно опасно, – пишет он в своей книге "Общая теория относительности". – Стоит поверить этому высказыванию, как тут же оказывается разорванной связь между математикой и физикой, и как та, так и другая, станут бесплодными, потеряв возможность взаимного оплодотворения. Здесь мы позволим себе сказать об этом шёпотом лишь в качестве извинения перед читателем, который надеялся увидеть математику и физику общей теории относительности, связанными прочными цепями ясной и последовательной логичной мысли. Это невозможно. Сначала и до конца нам неизменно придётся изворачиваться, действуя наобум. И если в этой книге будут некорректности при различении и , то их будет не больше, чем допущено (и с необходимостью должно быть допущено) во всех аналогичных книгах. Такого рода печальное положение присуще не только общей теории относительности; формула $M \neq$ вечный спутник любой области математической физики".

К счастью, такая пессимистическая точка зрения является, повидимому, ошибочной.

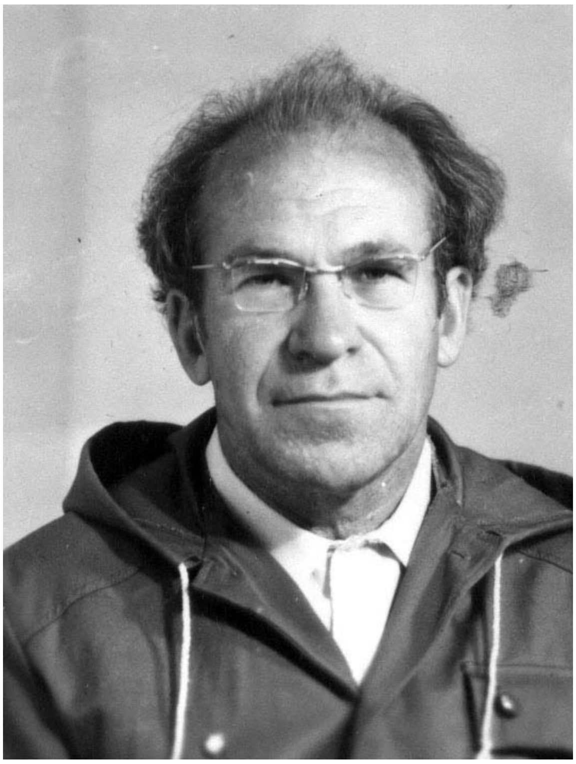
Однако, надо признать, что преодоление логических трудностей при построении последовательной физической теории, представляет собой задачу, решение которой становится возможным лишь при использовании принципиально новых методов исследования.

Излагаемая ниже теория физических структур представляет собой попытку "бурбакизации" физики, пересмотра её оснований с единой точки зрения, в основу которой вместо нескольких различных, полуинтуитивных образов, таких как частица, поле, пространство, время, положено одно единственное понятие – физическая структура.

Как будет показано ниже, это понятие, с одной стороны является достаточно общим, чтобы охватить все возможные физические явления, и в то же время достаточно конкретным, чтобы служить эффективным инструментом, позволяющим по опытным данным, полученным при измерении вполне определённых физических величин с помощью совершенно конкретного прибора, установить факт существования фундаментального физического закона.

Физическая структура является тем самым первичным понятием, позволяющим установить единство между различными физическими теориями и получить как следствие такие, на первый взгляд не имеющие ничего общего, постулаты, как аксиомы Евклида и закон Ньютона, оба начала термодинамики и принцип постоянства скорости света, уравнения Максвелла и принцип суперпозиции, лежащий в основании квантовой механики.

Мы надеемся, что пересмотр всей физической картины мира с точки зрения физических структур позволит установить общие принципы построения физических теорий, устранить барьер непонимания, разделяющий физиков и математиков и, перефразируя слова Бертрана Рассела сказать: “Физика владеет не только истиной, но и высшей красотой – красотой холодной и суровой, подобной красоте скульптуры. Возвышенно чистая, она способна к такому строгому совершенству, которое доступно только величайшему искусству”.



Юрий КУЛАКОВ (1968)

Лекция 2

Об одном принципе, лежащем в основании классической физики.

Знание принципов легко возмещает незнание некоторых фактов.

— Гельвеций.

Общая черта всех физических законов состоит в том, что различные физические объекты, принадлежащие к определённым классам, равноправны по отношению к рассматриваемому закону.

Ниже излагается математический аппарат, позволяющий естественным образом сформулировать это равноправие.

Оказывается, что из одного только требования равноправия можно вывести далеко идущие следствия о возможной структуре физических законов.

Общий принцип, лежащий в основе формулировки физических законов, записывается в виде функционального уравнения специального вида, для решения которого предлагается эффективный метод. В дальнейших работах будет показано, каким образом этот принцип может быть применён к обоснованию ряда известных физических теорий. Этот же подход позволяет предвидеть некоторые структурные особенности ещё не построенных, но принципиально возможных физических теорий.

Рассмотрим два произвольных множества:

$$\text{множество } \mathfrak{M} \text{ с элементами } i,\ k, \ldots \text{ и}$$
$$\text{множество } \mathfrak{N} \text{ с элементами } \alpha,\ \beta, \ldots .$$

Допустим, что каждой паре $i \in \mathfrak{M}$, $\alpha \in \mathfrak{N}$ сопоставляется действительное число $a_{i\alpha} \in \mathbb{R}$, так что в конечном итоге множеству $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляется некоторая числовая матрица $A = \|a_{i\alpha}\|$.

Так если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множества физических объектов различной природы, то матрица $\|a_{i\alpha}\|$ представляет собой результат эксперимента, характеризующий отношения, в которых находятся объекты i и α.

Мы будем говорить, что на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ задана физическая структура ранга (r, s), если $r \cdot s$ чисел

$$\begin{array}{cccc}
a_{i\alpha}, & a_{i\beta}, & \ldots, & a_{i\gamma}; \\
a_{k\alpha}, & a_{k\beta}, & \ldots, & a_{k\gamma}; \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{l\alpha}, & a_{l\beta}, & \ldots, & a_{l\gamma}.
\end{array}$$

стоящих на пересечении любых r строк $i,\ k,\ \ldots,\ l$ и любых s столбцов $\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \gamma$, связаны между собой функциональной зависимостью

$$\Phi\begin{pmatrix} a_{i\alpha}, & a_{i\beta}, & \ldots, & a_{i\gamma}; \\ a_{k\alpha}, & a_{k\beta}, & \ldots, & a_{k\gamma}; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{l\alpha}, & a_{l\beta}, & \ldots, & a_{l\gamma} \end{pmatrix} = 0 \tag{32}$$

вид которой не зависит от выбора подмножества из r элементов

$$\mathfrak{M}_r = \{i,\ k,\ \ldots,\ l\} \subset \mathfrak{M}$$

и подмножества из s элементов

$$\mathfrak{N}_s = \{\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \gamma\} \subset \mathfrak{N}$$

При этом предполагается, что функция Φ аналитична и не может быть представлена в виде суперпозиции аналитических функций меньшего числа переменных.

Мы будем говорить также, что функциональная зависимость вида (??) задаёт физический закон ранга (r, s), инвариантный относительно выбора конечных подмножеств $\mathfrak{M}_r$ и $\mathfrak{N}_s$ и реализуемый на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Равенство (??) является, по сути дела, символической записью бесконечной системы функциональных уравнений относительно одной неизвестной функции от $r{\cdot}s$ переменных $\Phi(x_{11},\ x_{12},\ \ldots,\ x_{rs})$ и одной неизвестной бесконечной матрицы $A = \|a_{i\alpha}\|$, представляющей собой одну числовую функцию двух нечисловых аргументов i и α.

Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти такую бесконечную матрицу $A = \|a_{i\alpha}\|$ и такую функцию $\Phi(x_{11},\ x_{12},\ \ldots,\ x_{rs})$, что для любой прямоугольной $r \times s$ – мерной подматрицы A_{rs} матрицы A все её элементы, подставленные в Φ, обращали бы $\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, \ldots, a_{l\gamma})$ в нуль.

Требование существования соотношений (??) при любом выборе r элементов из множества $\mathfrak{M}$ и s элементов из множества $\mathfrak{N}$ мы называем принципом обобщённой инвариантности (или *принципом холотропной*[95] *симметрии*).

Этот принцип наиболее естественным образом выражает факт равноправия всех элементов множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ по отношению к физическому закону ранга (r, s).

В следующих работах мы покажем, что матрица $A = \|a_{i\alpha}\|$ и функция $\Phi(x_{11},\ x_{12},\ \ldots,\ x_{rs})$, являющиеся решением бесконечной системы функциональных уравнений (??) при заданных r и s, определяются однозначно, с точностью до некоторого преобразования, зависящего от выбора конкретной измерительной операции и несущественного для построения общей теории.

[95]Термин **холотропный** происходит от сло́ва гр. $\check{o}\lambda o\zeta$ (holos) – *целое, всё* и сло́ва гр. $\tau\rho\acute{o}\pi o\zeta$ (tropos) – *свойство* и выражает особое свойство системы существовать как единое целое.

Другими словами, требование одного только факта существования физического закона ранга (r, s), характеризуемого равенством (??), позволяет определить как допустимый набор экспериментальных данных $a_{i\alpha}$, так и конкретное выражение для самого физического закона.

В этой статье мы ограничимся рассмотрением физических структур наименьшего возможного ранга $(2,, 2)$. На этом простейшем примере мы увидим, какие методы применяются при решении поставленной задачи. Кроме того, полученный результат даст нам возможность проанализировать логический смысл, скрытый за традиционной формулировкой уравнения Ньютона, что и будет сделано в следующей статье.

Итак, мы ищем такую бесконечную матрицу $A = \|a_{i\alpha}\|$ и такую функцию от четырёх переменных $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, чтобы элементы любой квадратной подматрицы A_{22}, построенной на двух произвольных строках i и k и двух произвольных столбцах α и β, были бы связанны между собой соотношением

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = 0 \tag{33}$$

От функции $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ мы потребуем лишь, чтобы она была дифференцируемой, и чтобы уравнение $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ было разрешимо относительно любой из переменных.

Прежде всего, из всех элементов множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ выделим по одному элементу $0 \in \mathfrak{M}$ и $0 \in \mathfrak{N}$, которые назовём “эталонами” в соответствующих множествах.

Затем, разрешив уравнение (??) относительно $a_{i\alpha}$ и подставляя в (??) вместо k и β соответственно 0 и 0, получим:

$$a_{i\alpha} = f(a_{i0}, a_{0\alpha}, a_{00}) = \varphi(x_i, \xi_\alpha), \tag{34}$$

где $x_i = a_{i0}$ и $\xi_\alpha = a_{0\alpha}$ – числовые параметры, характеризующие, соответственно, элементы множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Итак, задача нахождения матрицы $A = \|a_{i\alpha}\|$ или, что одно и то же, одной числовой функции от двух нечисловых аргументов i и α и одной функции от четырёх переменных $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, свелась к нахождению $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и одной числовой функции $\varphi(x, \xi)$ от двух числовых переменных x и ξ таких, что

$$\Phi(\varphi(x, \xi), \varphi(x, \eta), \varphi(y, \xi), \varphi(y, \eta)) \equiv 0 \tag{35}$$

Подчеркнём, что равенство (??) является тождеством относительно переменных x, y, ξ, η, обозначающих соответственно x_i, x_k, ξ_α, ξ_β. Дифференцируя тождество (??) по x_i, x_k, ξ_α, ξ_β, мы получим систему четырёх однородных уравнений относительно четырёх неизвестных

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_4}$$

.

Чтобы эта система имела отличные от нуля решения, необходимо, чтобы

$$\begin{vmatrix} u(x,\xi) & 0 & v(x,\xi) & 0 \\ u(x,\eta) & 0 & 0 & v(x,\eta) \\ 0 & u(y,\xi) & v(y,\xi) & 0 \\ 0 & u(y,\eta) & 0 & v(y,\eta) \end{vmatrix} \equiv 0, \tag{36}$$

где

$$u(x,\xi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\xi), \qquad v(x,\xi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\xi),$$

или

$$\begin{vmatrix} w(x,\xi) & -w(y,\xi) & 0 & 0 \\ w(x,\eta) & -w(y,\eta) & 0 & 0 \\ 0 & w(y,\xi) & 1 & 0 \\ 0 & w(y,\eta) & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} w(x,\xi) & w(y,\xi) \\ w(x,\eta) & w(y,\eta) \end{vmatrix} \equiv 0, \tag{37}$$

где

$$w(x,\xi) = \frac{u(x,\xi)}{v(x,\xi)}$$

Чтобы удовлетворить тождеству (**??**), необходимо и достаточно положить

$$w(x,\xi) = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\xi)}{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(x,\xi)} = A(x)B(\xi),$$

где $A(x)$ и $B(\xi)$ – произвольные функции одного переменного.

Таким образом, задача сводится к решению следующего уравнения в частных произодных

$$\frac{1}{A(x)} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\xi) - B(\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(x,\xi) = 0 \tag{38}$$

Легко видеть, что общее решение уравнения (**??**) имеет вид

$$\varphi(x,\xi) = \chi(R(x)\cdot S(\xi)),$$

где $\chi(x)$ – произвольная функция от одной переменной, а

$$R(x) = exp\int A(x)dx \qquad \text{и} \qquad S(\xi) = exp\int \frac{d\xi}{B(\xi)}.$$

Но так как (x) и $B(\xi)$ произвольны, то

$$a_{i\alpha} = \varphi(x_i,\xi_\alpha) = \chi(R(x_i)\cdot S(\xi_\alpha)), \tag{39}$$

где $\chi(x)$, $R(x)$ и $S(x)$ – произвольные функции.

Чтобы найти вид функции $\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)$, перепишем (**??**) в виде

$$\chi^{-1}(a_{i\alpha}) = R(x_i)\cdot S(\xi_\alpha),$$

откуда легко получаем, что

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k_beta}) = \begin{vmatrix} \chi^{-1}(a_{i\alpha}) & \chi^{-1}(a_{i\beta}) \\ \chi^{-1}(a_{k\beta}) & \chi^{-1}(a_{k\beta}) \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, мы показали, что матрица $A = \|a_{i\alpha}\|$ и функция $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, удовлетворяющие принципу обобщённой инвариантности (??), определены с точностью до произвольной функции $\chi(x)$ от одной переменной и имеют вид

$$a_{i\alpha} = \chi(R_i \cdot S_\alpha),$$

где R_i и S_α – произвольные числа, и

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{vmatrix} \chi^{-1}(x_1) & \chi^{-1}(x_2) \\ \chi^{-1}(x_3) & \chi^{-1}(x_4) \end{vmatrix}$$

В заключение благодарю Б.Я.Штивельмана за многочисленные полезные дискуссии и А.А.Фета за постоянный интерес к работе.

Ностальгия

Лекция 3

Ньютоновская механника с точки зрения теории физических структур.

По моему мнению, прежде всего нужно указать на то, что как раз введение в механнику очень трудно излагать вдумчивым слушателям, не ощущая при этом необходимости то тут, то там приносить этим слушателям, не без некоторого смущения, извинения и не испытывая желания побыстрей перейти от введения к примерам, которые говорят сами за себя.

— Генрих Герц.

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы установить соответствие между результатами общей теории физических структур [?] и традиционной формулировкой ньютоновской механики. При этом мы покажем, что два инварианта, возникающие в общей теории, могут быть отождествлены с массоой и силой. Что же касается системы отсчёта, то для её характеристики существует третий инвариант, обращение в нуль которого является характерной особенностью "инерциальных" систем.

Возьмём в качестве множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, фигурирующих в общей теории физических структур [?], два конкретных множества: множество тел $i, \; k, \ldots, l, \ldots$ и множество "ускорителей"[96] $\alpha, \; \beta, \ldots, \gamma, \ldots$. Рассмотрим некоторую экспериментальную операцию μ, осуществляемую в системе отсчёта σ и сопоставляющую каждому телу i и каждому ускорителю α действительное число $a_{i,\alpha}^{(\mu,\sigma)}$.

При этом мы сделаем предположение, что отношение между множеством тел $\mathfrak{M}$ и множеством ускорителей $\mathfrak{N}$, осуществляемое измерительной операцией μ в системе отсчёта σ, описываются физической структурой ранга $(2,2)$.

Это значит что четыре величины $a_{i,\alpha}^{(\mu,\sigma)}, \; a_{i,\beta}^{(\mu,\sigma)}, \; a_{k\alpha}^{(\mu,\sigma)}, \; a_{k,\beta}^{(\mu,\sigma)}$, относящиеся к любым двум телам $i, \; k$ и к любым двум ускорителям $\alpha, \; \beta$, оказываются связаннными между собой соотношением

$$\Phi(a_{i,\alpha}^{(\mu,\sigma)}, \; a_{i,\beta}^{(\mu,\sigma)}, \; a_{k\alpha}^{(\mu,\sigma)}, \; a_{k,\beta}^{(\mu,\sigma)}) = 0.$$

Как было показано в [?], матрица $A = \|a_{i\alpha}\|$, удовлетворяющая принципу обобщённой инвариантности, должна иметь следущее строение:

$$a_{i,\alpha} = \chi(R_i \cdot S_\alpha),$$

[96] В настоящей статье под ускорителями мы будем понимать всевозможные механизмы, сообщающие телам различные ускорения.

где $\chi(x)$ – произвольная функция одного переменного, а R_i и S_α – произвольные числа.

В этом случае

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = \chi^{-1}(a_{i\alpha})\chi^{-1}(a_{k\beta}) - \chi^{-1}(a_{i\beta})\chi^{-1}(a_{k\alpha}) = 0$$

Итак, если эксперимент μ, осуществляемый в системе отсчёта σ, реализует на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга $(2,2)$, то для каждых μ и σ должна существовать такая функция $\lambda_{\mu\sigma}(x) \equiv \chi^{-1}(x)$, что при любых $i,\ k \in \mathfrak{M}$ и $\alpha,\ \beta \in \mathfrak{N}$ имеет место соотношение:

$$\lambda_{\mu\sigma}(a_{i,\alpha}^{(\mu,\sigma)})\ \lambda_{\mu\sigma}(a_{k,\beta}^{(\mu,\sigma)}) - \lambda_{\mu\sigma}(a_{i\beta}^{(\mu,\sigma)})\ \lambda_{\mu\sigma}(a_{k,\beta}^{(\mu,\sigma)}) = 0 \tag{40}$$

Задача состоит в том, чтобы по опытным данным $a_{i,\alpha}^{(\mu,\sigma)}$ найти неизвестную функцию $\lambda_{\mu\sigma}(x)$ и тем самым подтвердить сделанное в начале предположение о существовании физической структуры ранга $(2,2)$.

Так как любая величина $a_{i,\alpha}^{(\mu,\sigma)}$ известна нам лишь с конечной точностью, то при нахождении $\lambda_{\mu\sigma}(x)$ мы можем ограничиться лишь конечным числом членов разложения и искать $\lambda_{\mu\sigma}(x)$ в виде:

$$\lambda_{\mu\sigma}(x) = {}^{\mu,\sigma}_{0} + {}^{\mu,\sigma}_{1} \cdot x + {}^{\mu,\sigma}_{2} \cdot x^2 + \ldots + {}^{\mu,\sigma}_{n} \cdot x^n. \tag{41}$$

Подставляя (??) в (??) при фиксированных $i,\ k,\ \alpha,\ \beta$ мы получим одно уравнение для $n+1$ неизвестных ${}^{\mu,\sigma}_{0},\ {}^{\mu,\sigma}_{1},\ \ldots,\ {}^{\mu,\sigma}_{n}$.

$$\psi({}^{\mu,\sigma}_{0},\ {}^{\mu,\sigma}_{1},\ \ldots,\ {}^{\mu,\sigma}_{n};\ a_{i,\alpha}^{(\mu,\sigma)},\ a_{i,\beta}^{(\mu,\sigma)},\ a_{k\alpha}^{(\mu,\sigma)},\ a_{k,\beta}^{(\mu,\sigma)}) = 0. \tag{42}$$

Однако, выбирая из $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ различные $i,\ k,\ \alpha,\ \beta$, мы получим систему уравнений типа (??), число которых заведомо превышает число неизвестных ${}^{\mu,\sigma}_{0},\ {}^{\mu,\sigma}_{1},\ \ldots,\ {}^{\mu,\sigma}_{n}$. Таким образом, если наше предположение о существовании физической структуры ранга $(2,2)$ верно, то система уравнений типа (??) должна быть совместной для каждых μ и σ и, следовательно существует такая функция $\lambda_{\mu,\sigma}(x)$, что $\lambda_{\mu,\sigma}(a_{i,\alpha}^{(\mu,\sigma)})$ не зависит ни от μ, ни от σ, а зависит лишь от i и α, т.е.

$$\lambda_{\mu,\sigma}(a_{i,\alpha}^{(\mu,\sigma)}) = \lambda_{\nu,w}(a_{i,\alpha}^{(\nu,w)}) = \chi^{-1}(a_{i\alpha}) \tag{43}$$

где μ и ν – различные измерительные операции, принадлежащие к одному и тому же классу, σ и w – различные системы отсчёта.

Опыт показывает, что, если в качестве экспериментально измеряемой величины взять ускорение $w_{i\alpha}^{\sigma}$ тела i под действием ускорителя α, измеренное в системе отсчёта σ, то в этом случае $\lambda_{\mu\sigma}(x)$ имеет наиболее простой вид:

$$\lambda_{\mu\sigma}(x) = a^{\sigma} + x. \tag{44}$$

При этом равенство (??) запишется в виде:

$$a^{\sigma} + w_{i\alpha}^{\sigma} = a^{\omega} + w_{i\alpha}^{\omega} = a^{0} + w_{i\alpha}^{0}, \tag{45}$$

где 0 – фиксированная “эталонная” система отсчёта.

Как следует из самого́ определения коэффициентов разложения ${}_{m}^{\mu,\sigma}$, константа $a^\sigma \equiv {}_{0}^{\mu,\sigma}$ не может зависеть ни от i ни от α, то есть является инвариантом относительно выбора i и α, и может зависеть лишь от системы отсчёта σ.

Итак, согласно (**??**) и (**??**), имеем:

$$(a^\sigma + w^\sigma_{i\alpha})\,(a^\sigma + w^\sigma_{k\beta}) - (a^\sigma + w^\sigma_{i\beta})\,(a^\sigma + w^\sigma_{k\alpha}) = 0, \tag{46}$$

откуда

$$a^\sigma = \frac{w^\sigma_{i\alpha} w^\sigma_{k\beta} - w^\sigma_{i\beta} w^\sigma_{k\alpha}}{w^\sigma_{i\alpha} + w^\sigma_{k\beta} - w^\sigma_{i\beta} - w^\sigma_{k\alpha}} \tag{47}$$

Таким образом, измеряя ускорения $w^\sigma_{i\alpha}$ разных тел i и k под действием разных ускорителей α и β в одной и той же системе отсчёта σ, мы всякий раз будем получать по формуле (**??**) одно и то же число a^σ, которое зависит лишь от системы отсчёта σ и является его естественной характеристикой. Те системы, для которых $a^\sigma = 0$, мы будем называть естественными.

Примером естественной системы отсчёта является система падающего лифта или любая “инерциальная система” при отсутствии “сил тяготения”[97].

Из (**??**) легко получить фундаментальное соотношение

$$(w^\sigma_{i\alpha} w^\sigma_{k\beta} - w^\sigma_{i\beta} w^\sigma_{k\alpha})\,(w^\sigma_{l\gamma} + w^\sigma_{m\delta} - w^\sigma_{l\delta} - w^\sigma_{m\gamma}) - (w^\sigma_{l\gamma} w^\sigma_{m\delta} - w^\sigma_{l\delta} w^\sigma_{m\gamma})\,(w^\sigma_{i\alpha} + w^\sigma_{k\beta} - w^\sigma_{i\beta} - w^\sigma_{k\alpha}) = 0$$

связывающее ускорения тел $i,\ k,\ l,\ m$, находящихся под действием ускорителей $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$, измеренные в произвольной системе отсчёта σ.

Кроме a^σ, можно найти ещё два инварианта.

Так, из равенства (**??**) вытекает, что отношение двух сумм $a^\sigma + w^\sigma_{i\alpha}$ и $a^\sigma + w^\sigma_{i\beta}$, связанных с одним и тем же телом i и с двумя различными ускорителями α и β, не зависит от выбора этого тела, то есть

$$\frac{w^\sigma_{i\alpha} + a^\sigma}{w^\sigma_{i\beta} + a^\sigma} = \frac{w^\sigma_{k\beta} + a^\sigma}{w^\sigma_{k\beta} + a^\sigma} = \frac{w^\sigma_{l\alpha} + a^\sigma}{w^\sigma_{l\beta} + a^\sigma} = \ldots = \varphi_{\alpha,\beta}, \tag{48}$$

где $\varphi_{\alpha,\beta}$ – некоторая величина, инвариантная относительно выбора тел и играющая роль относительной характеристики ускорителей α и β.

Точно так же из равенства (**??**) следует, что отношение сумм $w^\sigma_{i\alpha} + a^\sigma$ и $w^\sigma_{k\alpha} + a^\sigma$, связанных с двумя различными телами i и k и с одним и тем же ускорителем α, не зависит от выбора этого ускорителя, то есть

$$\frac{w^\sigma_{i\alpha} + a^\sigma}{w^\sigma_{k\alpha} + a^\sigma} = \frac{w^\sigma_{i\beta} + a^\sigma}{w^\sigma_{k\beta} + a^\sigma} = \frac{w^\sigma_{i\gamma} + a^\sigma}{w^\sigma_{k\gamma} + a^\sigma} = \ldots = \psi_{i,k}, \tag{49}$$

где $\psi_{i,k}$ – новая величина инвариантная относительно выбора ускорителей и играющая роль относительной характеристики тел i и k.

[97] Оба последних понятия мы взяли в кавычки, желая подчеркнуть их интуитивное и нестрогое происхождение.

Среди всех тел множества $\mathfrak{M}$ выделим одно, обозначим его через 0 и назовём эталонным телом.

Точно так же через 0 обозначим эталонный ускоритель. Подставляя в равенства (**??**) и (**??**) вместо k и β, соответственно, 0 и 0, получим:

$$w^\sigma_{i\alpha} + a^\sigma = w^\sigma_{i0} + a^\sigma \varphi_{\alpha,0} = w^\sigma_{00} + a^\sigma \psi_{i,0}\varphi_{\alpha,0},$$

или на основании (**??**), окончательно:

$$w^\sigma_{i\alpha} + a^\sigma = (w^0_{00} + a^0)\psi_{i,0}\varphi_{\alpha,0} \tag{50}$$

Итак, мы показали, что сумма $w^\sigma_{i\alpha} + a^\sigma$, связанная с телом i и ускорителем α, равна произведению двух величин, одна из которых $\varphi_{\alpha,0} \equiv \varphi_\alpha$ является инвариантной характеристикой ускорителя α, а другая $\psi_{i,0} \equiv \psi_i$ – инвариантной характеристикой тела i.

Заметим при этом, что в качестве характеристик α и i можно было бы взять любые функции $u(\varphi_\alpha)$ и соответственно $v(\psi_i)$ (любая функция от инварианта есть инвариант). Однако, чтобы ввести такую характеристику наиболее разумным способом, необходимо воспользоваться двумя следующими опытными фактами:

1. Рассмотрим произвольное тело i и два произвольных ускорителя α и β.

Измерим ускорения $w^\sigma_{i\alpha}$ и $w^\sigma_{i\beta}$ и ускорение $w^\sigma_{i,\alpha+\beta}$ тела i при одновременном действии ускорителей α и β.

Опыт показывает, что имеет место следущее соотношение, справедливое при любых α, β и i:

$$w^\sigma_{i,\alpha+\beta} + a^\sigma = w^\sigma_{i\alpha} + a^\sigma + w^\sigma_{i\beta} + a^\sigma. \tag{51}$$

Подставляя (**??**) в (**??**), находим, что $u(\varphi_\alpha) = \varphi_\alpha$ обладает свойством аддитивности:

$$\varphi_{\alpha+\beta} = \varphi_\alpha + \varphi_\beta \tag{52}$$

2. Рассмотрим теперь два произвольных тела i и k и один ускоритель α.

Измерим ускорения $w^\sigma_{i\alpha}$ и $w^\sigma_{k\alpha}$ и ускорение $w^\sigma_{i+k\alpha}$ тела, полученного путём объединения тел i и k, при действии ускорителя α. Как и в предыдущем случае, результаты трёх измерений оказываются связанными между собою, однако, в отличие от (**??**), эта связь имеет вид:

$$\frac{1}{w^\sigma_{i+k,\alpha} + a^\sigma} = \frac{1}{w^\sigma_{i\alpha} + a^\sigma} + \frac{1}{w^\sigma_{k\alpha} + a^\sigma}. \tag{53}$$

Подставляя в (**??**) выражение (**??**), находим, что $v(\psi_i) = \frac{1}{\psi_i}$ обладает свойством аддитивности:

$$\frac{1}{\psi_{i+k}} = \frac{1}{\psi_i} + \frac{1}{\psi_k}. \tag{54}$$

Таким образом, удобно в качестве характеристики ускорителя α взять $u(\varphi_\alpha) = \varphi_\alpha$ и назвать[98] её силой F_α, а в качестве характеристики тела i взять $v(\psi_i) = \frac{1}{\psi_i}$ и назвать её массой m_i.

Переписывая равенство (??) в новых обозначениях, получаем окончательно:

$$w_{i\alpha}^{\sigma} + a^{\sigma} = (w_{00}^{0} + a^{0})\frac{F_\alpha}{m_i}. \tag{55}$$

Итак, закон Нью́тона, записанный в традиционном виде (??), является следствием универсального соотношения (??) и опытного факта, состоящего в утверждении (??) и линейности $\lambda_{\mu\sigma}(x)$; кроме того, он содержит в себе два определения.

Принятые определения силы $F_\alpha = \varphi_\alpha$ и массы $m_i = \frac{1}{\varphi_i}$ удобны, так как в наиболее простой форме отражают факт существования двух дополнительных соотношений (??) и (??), связанных соответственно, с композицией ускорителей α и тел i.

Литература

[1] *Кулаков Ю.И.*, "Об одном принципе, лежащем в основании классической физики". Послано в ДАН СССР 28 января 1968 г.

[98]В принципе, мы могли бы назвать "силой" и "массой" любую функцию $u(\varphi_\alpha)$, и соответственно, $v(\psi_i)$, однако введённые таким образом величины обладали бы более сложными законами композиции.

Лекция 4

Геометрическая интерпретация основных понятий термодинамики

Каждая непротиворечивая, последовательная физическая теория должна содержать в самой себе всё необходимое для определения и измерения тех величин, с которыми эта теория имеет дело.

— Бор и Розенфельд

Мы предлагаем геометрическую интерпретацию термодинамики, позволяющую весьма просто получить, исходя из опытных данных, её основные понятия и законы.

Изложение состоит из двух независимых частей.

В первой части мы исходим из основного уравнения термодинамики, предполагая известными все основные понятия, и приходим к геометрической формулировке термодинамикии с помощью двух видов метрики – симметрической и антисимметрической, а также к "конечному уравнению термодинамики", представляющему (повидимому, до сих пор не замеченную) интегральную форму основного уравнения.

Во второй части, напротив, мы будем исходить из эксперимента.

В основе нашего подхода лежат геометрические соотношения, обнаруживаемые при непосредственном анализе экспериментальных результатов и сразу приводящие к обоим принципам термодинамики.

I. Мы рассмотрим простейший случай, исключив влияние электрического и магнитного поля на вещество. В этом случае основное уравнение термодинамики имеет вид

$$dU = TdS - pdV. \tag{56}$$

Обозначим через

$$A_{im}^{(S)} = -\int_i^m p_{(S=const)} dV$$

работу, производимую над системой при адиабатическом переходе из состояния i в состояние m, а через

$$A_{mn}^{(T)} = -\int_m^k p_{(T=const)} dV$$

работу при изотермическом переходе из состояния m в состояние k.

Тогда из (**??**) следует:

$$U_m - U_i = A_{im}^{(S)}$$

$$U_k - U_m = T_k(S_k - S_m) + A^{(T)}_{mk},$$

откуда, полагая $A^{(ST)} = A^{(S)}_{im} + A^{(T)}_{mk}$, имеем

$$U_k - U_i = T_k(S_k - S_i) + A^{ST}_{ik}. \tag{57}$$

Аналогично, полагая $A^{(TS)} = A^{(T)}_{in} + A^{(S)}_{nk}$, получим

$$U_k - U_i = T_i(S_k - S_i) + A^{TS}_{ik}. \tag{58}$$

Из (**??**) и (**??**) следует конечное уравнение термодинамики

$$a_{ik} = (T_i + T_k)(S_i - S_k) + 2(U_k - U_i), \tag{59}$$

где

$$a_{ik} = A^{(ST)} + A^{(TS)}.$$

Положим, далее $s_{ik} = A^{ST} - A^{(TS)}$, тогда из (**??**) и (**??**) получаем:

$$s_{ik} = -(T_i - T_k)(S_i - S_k). \tag{60}$$

Переходя к безразмерным переменным x и y

$$T = T_0\ (x - y), \qquad S = S_0\ (x + y)$$

перепишем (**??**) в виде

$$s_{ik} = T_0 S_0\ [-(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2]. \tag{61}$$

Итак,

$$x_i = \frac{1}{2}\left(\frac{S_i}{S_0} + \frac{T_i}{T_0}\right)$$

и

$$y_i = \frac{1}{2}\left(\frac{S_i}{S_0} - \frac{T_i}{T_0}\right)$$

можно истолковать как декартовы координаты состояния i в двумерном псевдоевклидовом пространстве, симметрическая метрика которого задается равенством (**??**).

Это наводит на мысль придать геометрический смысл также основному уравнению (**??**).

Если обозначить

$$R_i = 2U_i - T_i S_i = U_i + F_i,$$

где U_i и F_i - внутренняя и свободная энергия состояния i , то уравнению (**??**) можно придать вид

$$a_{ik} = T_k S_i - T_i S_k + R_k P_i - R_i P_k, \tag{62}$$

где

$$P_i = P_k = 1.$$

Теперь можно истолковать T_i , S_i , R_i и $P_i = 1$ как три существенные и одна "замороженная" координаты состояния i в некотором четырёхмерном симплектическом пространстве, антисимметрическая метрика которого a_{ik} задаётся равенством (**??**).

II. Предположим теперь, что с помощью надлежащего описания экспериментальных процедур мы можем определить процедуры "адиабатического" и "изотермического" измерения системы.

Подчеркнём, что такое предположение предшествует введению понятий энтропии и температуры и не основывается на этих понятиях.

Каждой паре состояний i и k можно, как выше, сопоставить две экспериментально измеряемые величины – работы $A_{ik}^{(ST)}$ и $A^{(TS)_{ik}}$.

Легко видеть, что

$$s_{ik} = A_{ik}^{(ST)} - A_{ik}^{(TS)} = s_{ki} \tag{63}$$

$$a_{ik} = A_{ik}^{(ST)} + A_{ik}^{(TS)} = -a_{ki} \tag{64}$$

Симметричный характер s_{ik} наводит на мысль рассматривать эти числа как "расстояния" между состояниями системы.

Как известно, в двухмерной геометрии нулевой кривизны квадраты попарных расстояний между точками i, k, l, m обращают в нуль определитель Кели – Менгера

$$\begin{vmatrix} 0 & s_{ik} & s_{il} & s_{im} & 1 \\ s_{ki} & 0 & s_{kl} & s_{km} & 1 \\ s_{li} & s_{lk} & 0 & s_{lm} & 1 \\ s_{mi} & s_{mk} & s_{ml} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{65}$$

Как показывает опыт, числа s_{ik} для любых четырёх состояний системы удовлетворяют конечному уравнению (**??**).

Следовательно, можно ввести в пространстве состояний такую систему координат x, y , что s_{ik} может быть записано в виде:

$$S_{ik} = \pm(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2. \tag{66}$$

Поскольку на опыте получаются как положительные, так и отрицательные значения s_{ik} , мы должны выбрать в (**??**) знак минус.

Вводя новые координаты

$$S = \sqrt{\frac{S_0}{T_0}}(x + y), \qquad T = \sqrt{\frac{T_0}{S_0}}(x - y)$$

из (**??**) получаем (**??**).

Эти координаты S_i и T_i мы будем по определению называть *энтропией* и *температурой* системы, находящейся в состоянии i .

Для антисимметрического скалярного произведения a_{ik} мы не нашли в литературе тождеств подобных (**??**). Однако, соответствующий определитель может быть указан; оказывается, что опытные значения a_{ik} для **пяти** (для чётного числа состояний определитель типа (**??**) тождественно равен нулю при $a_{ik} = -a_{ki}$) произвольных состояний i, k, l, m, n удовлетворяют уравнению:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{ik} & a_{il} & a_{im} & a_{in} & 1 \\ a_{ki} & 0 & a_{kl} & a_{km} & a_{kn} & 1 \\ a_{li} & a_{lk} & 0 & a_{lm} & a_{ln} & 1 \\ a_{mi} & a_{mk} & a_{ml} & 0 & a_{mn} & 1 \\ a_{ni} & a_{nk} & a_{nl} & a_{nm} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{67}$$

Можно показать, что определитель (**??**) обращается в нуль, если в качестве a_{ik} взять следующую антисимметрическую функцию от шести произвольных параметров:

$$a_{ik} = \alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i + \gamma_i - \gamma_k \tag{68}$$

Отождествим α и β с S и T , введёнными при рассмотрении симметрической метрики s_{ik} . Система уравнений

$$s_{ik} = -(T_i - T_k)(S_i - S_k) \qquad a_{ik} = T_kS_i - T_iS_k + \gamma_k - \gamma_i \tag{69}$$

допускает однозначное решение относительно T, S и γ , если одному фиксированному состоянию 0 приписать произвольные значения T_0, S_0 и γ_0 , а другому состоянию 1 – произвольное значение T_1 . Тогда имеем

$$T_i = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{2s_{01}} \cdot [(s_{i0} - s_{i1} + s_{01}) - (a_{i0} - a_{i1} + a_{01})], \tag{70}$$

$$S_i = S_0 - \frac{2s_{01}}{T_1 - T_0} \cdot \frac{s_{i0}}{(s_{i0} - s_{i1} + s_{01}) - (a_{i0} - a_{i1} + a_{01})}. \tag{71}$$

Если вместо γ_i ввести новую величину

$$U_i = \frac{1}{2}(\gamma_i + T_iS_i), \tag{72}$$

которую по определению назовём *внутренней энергией* системы в состоянии i , то будем иметь

$$U_i = U_0 - \frac{1}{2}(a_{i0} - s_{i0}) - \frac{2s_{01}}{T_1 - T_0} \cdot \frac{T_0s_0}{(s_{i0} - s_{i1} + s_{01}) - (a_{i0} - a_{i1} + a_{01})}. \tag{73}$$

Из (**??**) и (**??**) непосредственно вытекает конечное уравнение термодинамики (**??**), а из (**??**) легко получить уравнение (**??**).

Наконец, *количество тепла*, поглощённое системой при переходе из состояния i в состояние k по определению считаем равным

$$Q_{ik} = U_k - U_i - A_{ik}^{TS}.$$

Легко показать, что

$$\frac{Q_{ik}^{(ST)}}{Q_{ik}^{(TS)}} = \frac{T_i}{T_k}.$$

В заключение считаю приятным долгом выразить свою глубокую признательность А.И.Фету, благодаря живому интересу и постоянным напоминаниям которого, настоящая статья доведена до конца.

КУЛАКОВ Юрий Иванович

К теории физических структур
(Четыре лекции для студентов НГУ)

Ответственный за выпуск Г.Г.Михайличенко.

Подписано к печати 13 февраля 1968 года. МН04051
Формат бумаги 60 Х 80 Объём 1,5 п.л. Цена 5 коп.
Тираж 200 экз. No 74.

Отпечатано на ротапринте НГУ. Новосибирск, 90.